

Variables Aléatoires

1. **Variable aléatoire discrète**
2. **Variable aléatoire continue**

Variable aléatoire discrète

1.1 Définition:

Une variable aléatoire X est une application définie sur un univers Ω dans un ensemble E de $\mathbb{R}$.

$$X: \Omega \rightarrow E$$

Si E est dénombrable, on dit que la variable aléatoire X est **discrète**

Exemple introductif

Soit une famille de 4 enfants dont les deux parents sont porteurs d'un gène d'une maladie héréditaire. La variable aléatoire

X nombre d'enfants atteints de cette maladie dans la famille c'est une variable aléatoire à cinq réalisations possibles:
 $X = 0; 1; 2; 3; 4.$

1.2 Loi de probabilité de variable aléatoire discrète

A chacune des réalisations x_i de la variable aléatoire X est associée une

probabilité $P(X = x_i) = p_i$, $(0 \leq p_i \leq 1, \forall i)$.

L'ensemble de couples $(x_i; p_i)$ forme une loi de probabilité si

La somme de toutes les probabilités est égale à 1.

C'est-à-dire

Etablir la loi de probabilité d'une expérience aléatoire, c'est :

- Déterminer l'ensemble E de toutes les issues possibles de l'expérience $x_1; x_2; \dots; x_n$
- Calculer les probabilités correspondantes $p_1; p_2; \dots; p_n$
- Résumer dans un tableau les résultats :

Valeur possible de la variable aléatoire	x_1	x_2		x_n	Total
Probabilité correspondante	p_1	p_2		p_n	1

2. 3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition :

La fonction de répartition associée à la variable aléatoire X , est la

fonction, notée F ou $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ par :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

1.4 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ P_1 & x_1 \leq x < x_2 \\ P_1 + P_2 & x_2 \leq x < x_3 \\ P_1 + P_2 + P_3 & x_3 \leq x < x_4 \\ P_1 + P_2 + P_3 + P_4 & x_4 \leq x < x_5 \\ \vdots & \vdots \\ P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n = 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

2. 3 Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire :

La représentation graphique est une fonction en escalier.

Propriétés:

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

2) *Elle est croissante au sens large:*

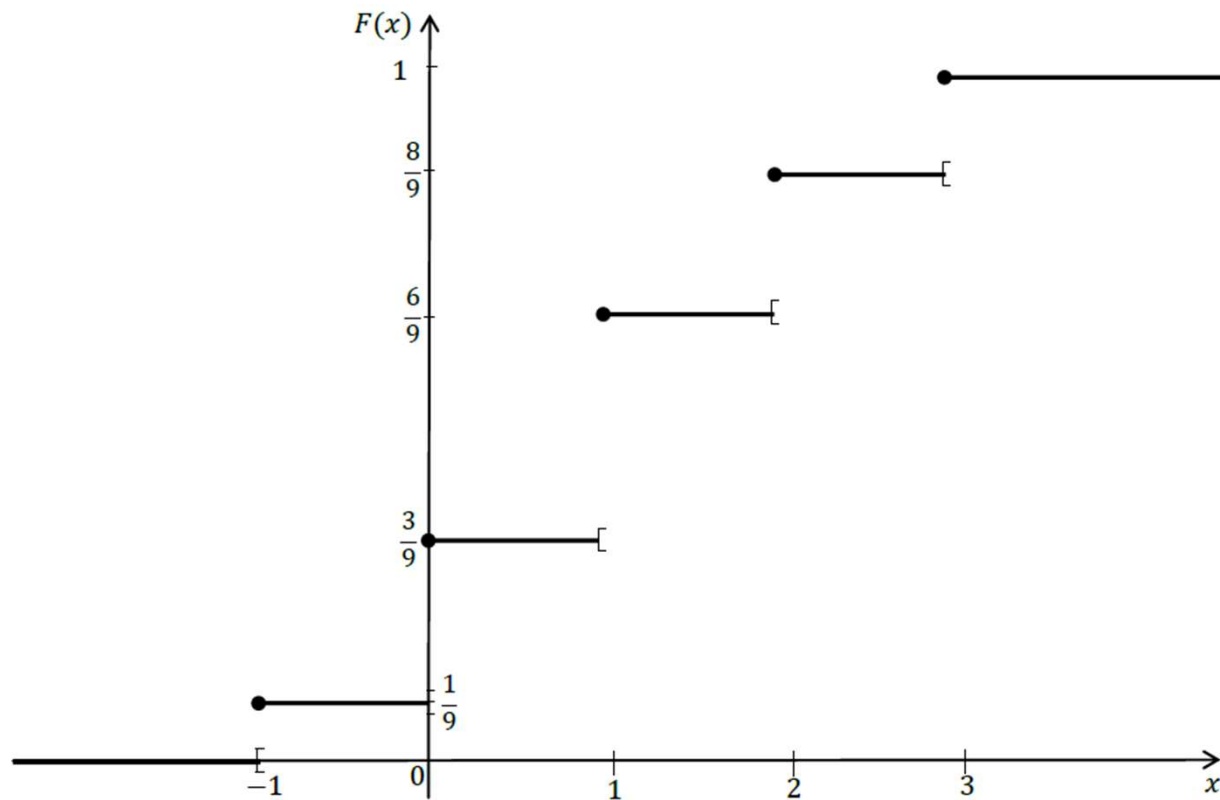
Si $a \leq b$ alors $F(a) \leq F(b)$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Example:

$X=x_i$	-1	0	1	2	3
$P(X=x_i)$ $=P_i$	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9
$F(x_i)$	1/9= p_1	3/9= p_1+p_2	6/9= $p_1+p_2+p_3$	8/9= $p_1+p_2+p_3+p_4$	1= $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5$

Fonction de répartition



2. Paramètres d'une variable aléatoire

2.1 Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Définition :

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une loi de probabilité est la moyenne :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + p_3 \times x_3 + \dots + p_n \times x_n$$

$$E(X) = \sum p_i \times x_i$$

2. Paramètres d'une variable aléatoire

2.2 Variance d'une variable aléatoire

Définition :

Il s'agit d'un indicateur mesurant la dispersion des valeurs x_i autour de $E(X)$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Transformation affine d'une variable aléatoire

DÉFINITION

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n$.

Pour tous réels a et b , on peut définir une autre variable aléatoire, en

associant à chaque issue donnant la valeur x_i , le nombre $ax_i + b$.

On note cette variable aléatoire $aX + b$.

Propriétés:

- Pour X et Y deux variables aléatoires quelconques
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$
- $E(aX) = aE(X) \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $E(X + b) = E(X) + b \quad \forall b \in \mathbb{R}$
- $E(aX + b) = aE(X) + b$

Propriétés

• *Par définition:*

$$1) V(X) \geq 0.$$

$$2) V(X + b) = V(X) \text{ et } V(aX) = a^2 V(X).$$

3) *Pour tout réel Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :*

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Exemple

On donne $E(X) = 3$ et $V(X) = 16$.

Calculer :

1) $E(2X + 5)$

2) $V(2X + 5)$

Correction

1) $E(2X + 5) = 2E(X) + 5 = 2 \times 3 + 5 = 12$

2) $V(2X + 5) = (-2)^2 \times V(X) = 4 \times 16 = 64$

Variable aléatoire discrète

On donne les lois de probabilités du gain X et Y de deux jeux.

Jeu N° 1

x_i	5	1	0	1	3
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,1	0,1	0,3

Jeu N° 2

y_i	3	1	0	1	2
$P(Y = y_i)$	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Pour le jeu N° 1 : $E(X) = 0,3$, $V(X) = 8,01$.

Pour le jeu N° 2 : $E(Y) = 0,3$, $V(Y) = 1,81$.

Variable aléatoire continue:

Une variable aléatoire est dite continue si son domaine de variation est l'ensemble $\mathbb{R}$ ou un ensemble de $\mathbb{R}$

Variable aléatoire continue:

Une variable aléatoire continue est déterminée par une fonction dite

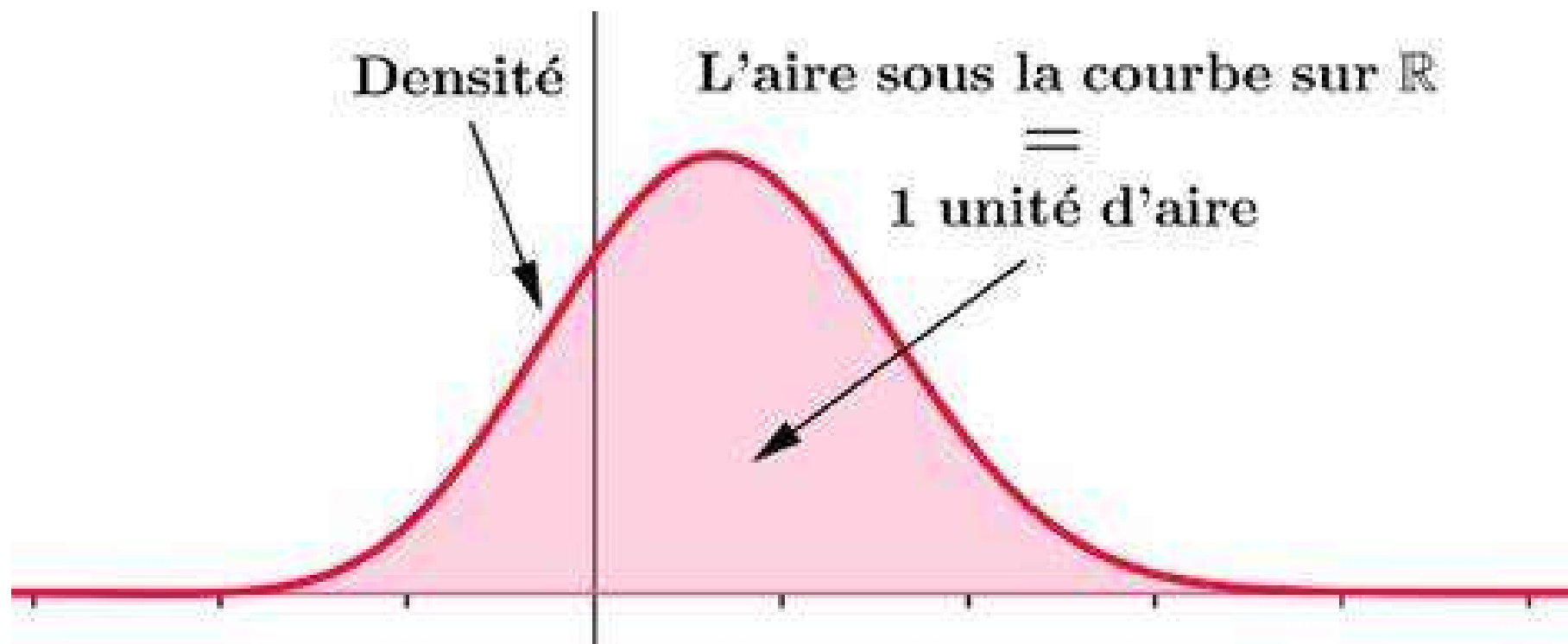
fonction de densité de probabilités notée $f(x)$ vérifiant:

1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ (f est une fonction positive)

2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \text{ (L'aire au dessous de la courbe de } f \text{ est égale à 1)}$$

Fonction de densité



Exemple

Soit :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \in [0; 2] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On va vérifier que f est une densité de probabilité:

1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$

2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^2 \frac{x}{2} = \frac{x^2}{4} \Big|_0^2 = 1$$

Variable aléatoire continue:

Pour une variable aléatoire continue X , on a:

$$1) P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

$$2) P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue:

La fonction de répartition associée à la variable aléatoire X ,

est la fonction, notée F ou $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ par :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue:

Propriétés:

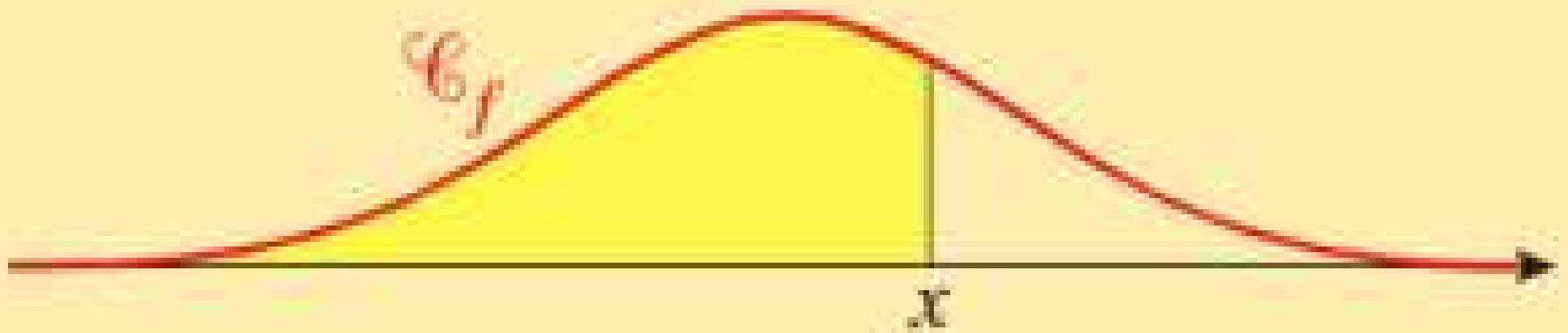
1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

2) *Elle est croissante au sens large:*

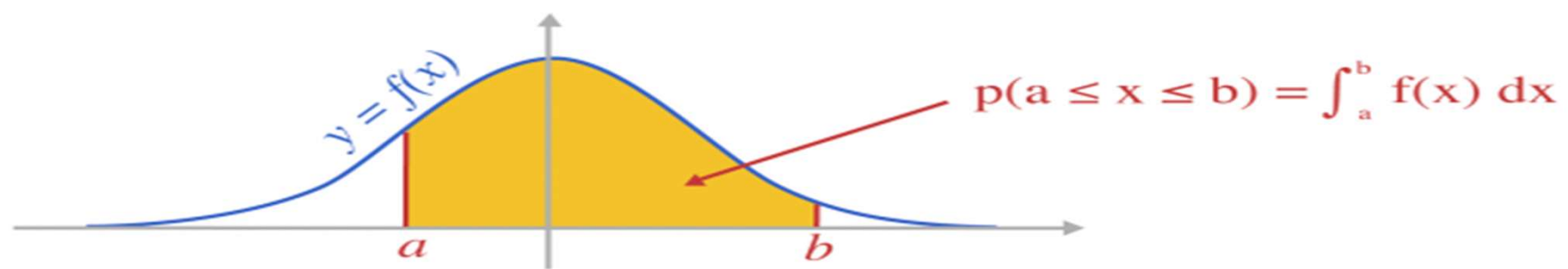
Si $a \leq b$ alors $F(a) \leq F(b)$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Fonction de répartition



Aire du domaine jaune = $P(X \leq x)$
= $F(x)$



La fonction de répartition permet de calculer la probabilité :

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

Remarque:

$$\text{➤ } P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$$

➤ Pour une variable continue:

$$P(X = a) = 0$$

Exemple

$$\text{Pour } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \in [0; 2] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\text{On a } F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

$$1) \text{ Pour } x < 0, F_X(x) = 0$$

$$2) \text{ Pour } 0 \leq x < 2, F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x \frac{t}{2} dt = \frac{t^2}{4} \Big|_0^x = \frac{1}{4}x^2$$

$$3) \text{ Pour } x \geq 2, F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^2 \frac{t}{2} dt + \int_2^{+\infty} 0dt = 1$$

Alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

On a $\dot{F}_X(x) = f(x)$

Espérance mathématique d'une variable aléatoire continue

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X qui suit une densité de probabilité est donnée par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

On reprend l'exemple précédent:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{8}{6}$$

Variance d'une variable aléatoire continue

La variance d'une variable aléatoire X suit une densité de probabilité est donnée par :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right)^2$$

On reprend l'exemple précédent:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right)^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2} = \frac{x^4}{8} \Big|_0^2 = 2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

=

$$V(X) = \frac{2}{9}$$

Définition

Une variable aléatoire est dite centrée réduite si son espérance est égale à 0 et son écart-type égale à 1.

La variable aléatoire $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite

Démonstration

$Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une transformation affine

$$Y = aX + b = \frac{1}{\sigma(X)}X - \frac{E(X)}{\sigma(X)}$$

Alors : $E(Y) = \frac{1}{\sigma(X)}E(X) - \frac{E(X)}{\sigma(X)} = 0$

$$V(Y) = \left(\frac{1}{\sigma(X)}\right)^2 V(X) = 1$$

Exemples et propriétés :



EXEMPLE

On jette une paire de dés bien équilibrés et on obtient l'ensemble fondamental Ω dont les éléments sont les 36 couples ordonnés des nombres allant de 1 à 6.

$$\begin{aligned}\Omega = \{ & (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ & (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ & (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ & (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ & (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ & (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \}\end{aligned}$$

- On suppose que la v. a. X est le maximum de point (a, b) de Ω , c'est-à-dire $X(a, b) = \max(a, b)$, alors X sera définie par : $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $p(X = 1) = p(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36}$,
- $p(X = 2) = p(\{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}) = \frac{3}{36}$,
- $p(X = 3) = p(\{(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}) = \frac{5}{36}$,
- $p(X = 4) = p(\{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}) = \frac{7}{36}$
- $p(X = 5) = \frac{9}{36}$ et $p(X = 6) = \frac{11}{36}$

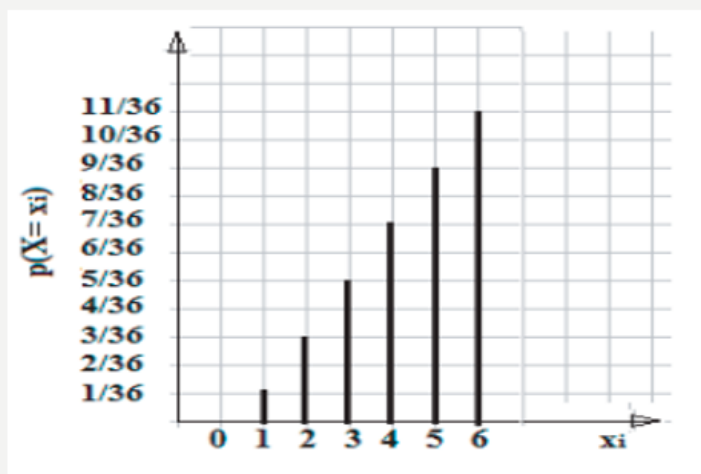
x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

LA DISTRIBUTION DE LA V. A. X

FONCTION DE DISTRIBUTION ET DE RÉPARTITION

Fonction de distribution

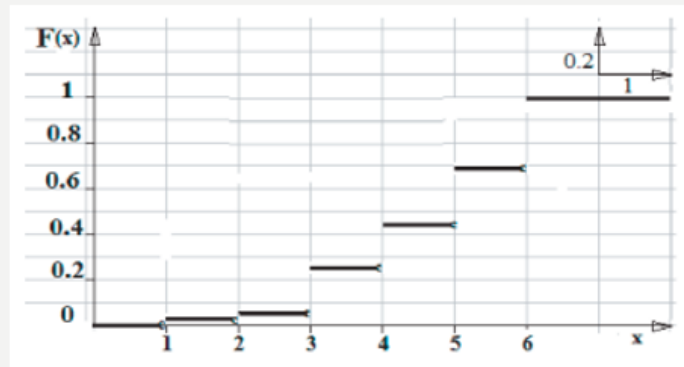
Cette fonction indique la loi de probabilité de la v. a. X. Elle est représentée par un diagramme en bâtons.



FONCTION DE RÉPARTITION

La fonction de répartition donne la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure à x . La fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(X = x_i).$$



Fonction de répartition d'une variable aléatoire :

EXEMPLE

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{36}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{4}{36}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{9}{36}, & 3 \leq x < 4 \\ \frac{16}{36}, & 4 \leq x < 5 \\ \frac{25}{36}, & 5 \leq x < 6 \\ \frac{36}{36}, & x \geq 6. \end{cases}$$

EXEMPLE

On reprend l'exemple 1.

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^6 x_i P(X = x_i) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} \\ &= \frac{161}{36} = 4,47 \end{aligned}$$

Propriétés de $E(X)$: Désignons par X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω , α et β deux constantes réelles.

1. $E(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot E(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}$
2. $E(\alpha \cdot X + \beta) = \alpha \cdot E(X) + \beta, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
3. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
4. $E(\alpha \cdot X + \beta \cdot Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

EXEMPLE

La variance de la variable aléatoire X est donnée par $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, avec

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 P(X = x_i) \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{36} + 2^2 \cdot \frac{3}{36} + 3^2 \cdot \frac{5}{36} + 4^2 \cdot \frac{7}{36} + 5^2 \cdot \frac{9}{36} + 6^2 \cdot \frac{11}{36} \\ &= \frac{191}{36} = 21,97 \end{aligned}$$

Par conséquent $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 21,97 - (4,47)^2 = 1,99$ et $\sigma(X) = \sqrt{1,99} = 1,4$.

PROPRIÉTÉS DE $V(X)$ ET $\sigma(X)$:

Désignons par X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω , α et β deux constantes réelles.

1. $V(\alpha.X) = \alpha^2.V(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}$
2. La variance d'une constante est nulle : $V(\alpha) = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $V(\alpha.X + \beta) = \alpha^2.V(X), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
d'où
4. $\sigma(X + \alpha) = \sigma(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}$
5. $\sigma(\alpha.X) = |\alpha|\sigma(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}$