المحور الرابع:

الدفعات

تعريف الدفعات :

الدفعات هي مبالغ مالية قد تكون متساوية (ثابتة) أو غير متساوية، تُدفع على فترات زمنية قد تكون سنوية، سداسية،...الخ، والفاصل الزمني بين سداد دفعتين قد يكون ثابت أو متغير.

الدفعات الثابتة :

-تعريف الدفعات الثابتة:

الدفعات الثابتة هي مبالغ مالية متساوية تُدفع دوريا في فترات متساوية، وقد تكون هذه الفترات عبارة عن سنوات، سداسيات، شهور، ...الخ

وتتميز الدفعات الثابتة بعدد من العناصر:

- قيمة الدفعات المقدمة دوريا متساوية؛
- الفترة الفاصلة بين دفعة وأخرى متساوية؛
- معدل فائدة متساوي؛
- يوجد تاريخ أول دفعة وتاريخ آخر دفعة؛
- يوجد عدد الدفعات.

- أنواع الدفعات الثابتة:

في الواقع هناك نوعان من الدفعات الثابتة حسب تاريخ الدفع:

- ◄ دفعات عادية: يتم إستخدامها في العديد من الحالات مثل تسديد الديون، على أن الميزة المشتركة فيها هي كونها تُدفع في نهاية الفترات، فيُطلق عليها دفعات عادية، أو تسديد، أو دفعات نهاية المدة.
- ◄ دفعات تهدف إلى تكوين رأس مال، فهي تُقدم في بدية الفترات ويُطلق عليها دفعات إستثمار أو دفعات بداية المدة.

- دفعات نهاية المدة:

-جملة دفعات نهاية المدة:

جملة دفعات نهاية المدة هي ما تجمع للشخص المودع أو المسدد في نهاية عدد من الفترات n. وبالتالي فقد قدم n دفعة متساوية. وللبحث عن جملة مجموع هذه الدفعات يكفي جمع جمل هذه الدفعات في نهاية المدة أي عند أخر الفترة n.

- قانون جملة دفعات نهاية المدة:

لنفترض أن:

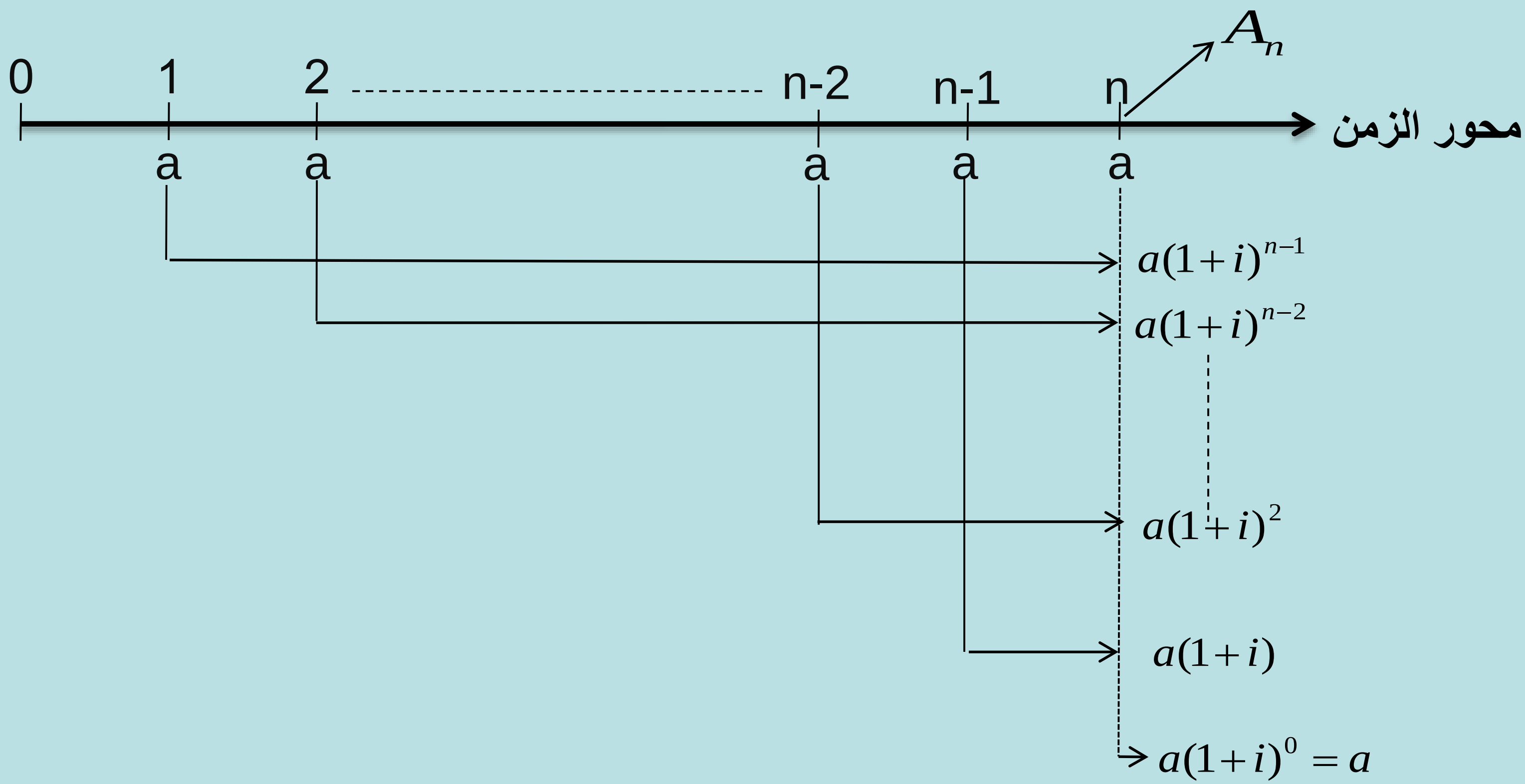
A_n : جملة دفعات نهاية المدة؛

a : قيمة الدفعة الثابتة المتساوية؛

i : معدل الفائدة؛

n: عدد الدفعات.

ويُمكن توضيح مفهوم جملة دفعات نهاية المدة وطريقة حسابها من خلال الشكل التالي:



وجملة الدفعات كاملة A_n تكون ابتداء من آخر دفعة كما يلي:

$$A_n = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + \ldots + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

وبملاحظة عناصر هذه الجملة نجد أنها تكوّن متتالية هندسية متزايدة حدها الأول a وأساسها (1+i) وعدد حدودها n وبالتالي فإن مجموع المتتالية الهندسية، أي جملة الدفعات يكون كما يلي:

$$A_n = a\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}\right] \Rightarrow A_n = a\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

ولحساب جملة دفعات نهاية المدة نستعين بالجدول المالي رقم 3 الذي يُقدم قيمة المقدار $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ بشرط وجود المعدل الفائدة في الجدول المالي، وهنا نكون أمام حالتين:

- **حالة وجود معدل الفائدة في الجدول المالي:**

مثال:

يُودع أحد الأشخاص في نهاية كل سنة ولمدة 5 سنوات مبلغ 4000 وحدة نقدية لدى أحد البنوك بمعدل فائدة 3%.

المطلوب: أوجد جملة الدفعات في نهاية السنة الخامسة؟

الحل:

$a = 4000$ وحدة نقدية

$i = 3\%$

$n = 5$ دفعات

$$A_n = a\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \Rightarrow A_5 = 4000\left[\frac{(1+0.03)^5 - 1}{0.03}\right] = 4000(5.30913581)$$

$\boldsymbol{A_5 = 21236,54}$ وحدة نقدية

- **حالة عدم وجود معدل الفائدة في الجدول المالي**: في هذه الحالة يتم حساب الجملة باستخدام طريقة التناسب كما يلي:

ليكن **i** هو المعدل غير المجدول: نحدد المعدلين المجدولين الذين يحصران المعدل غير المجدول وليكن المعدل الكبير i_1 والمعدل الصغير i_2، وبطريقة التناسب نجد المقدار $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ كما يلي:

$$\boxed{\frac{(1+i)^n-1}{i}=\frac{(1+i_2)^n-1}{i_2}+\frac{\left(\frac{(1+i_1)^n-1}{i_1}-\frac{(1+i_2)^n-1}{i_2}\right)\times(i-i_2)}{(i_1-i_2)}}$$

ثم نقوم بعد ذلك باستخدام المقدار $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ في حساب جملة الدفعات.

مثال:

يدفع أحد الأشخاص مبلغ 30000 وحدة نقدية في نهاية كل سنة ولمدة 6 سنوات وهذا لتسديد قيمة عقار مع العلم أن معدل الفائدة هو 2.8%.

المطلوب: أحسب قيمة العقار في نهاية الفترة؟

الحل:

$a = 3000$ وحدة نقدية

$i = 2,8\%$

$n = 6$ دفعات

نلاحظ أن معدل الفائدة 2.8% غير موجود في الجدول المالي وهو معدل محصور بين المعدلين المجدولين $i_1 = 3\%$,$i_2 = 2.75\%$ ، ومنه :

$$\frac{(1+i)^n-1}{i} = \frac{(1+i_2)^n-1}{i_2} + \frac{\left(\frac{(1+i_1)^n-1}{i_1} - \frac{(1+i_2)^n-1}{i_2}\right)\times(i-i_2)}{(i_1-i_2)}$$

$$\frac{(1+0.028)^6-1}{0.028} = \frac{(1+0.0275)^6-1}{0.0275} + \frac{\left(\frac{(1+0.03)^6-1}{0.03} - \frac{(1+0.0275)^6-1}{0.0275}\right)\times(0.028-0.0275)}{(0.03-0.0275)}$$

$$\frac{(1+0.028)^6-1}{0.028} = 6.4279404 + \frac{(6.468409884-6.4279404)\times 0.0005}{(0.0025)} = 6.4360343$$

$$A_n = a\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \Rightarrow A_6 = 30000\left[\frac{(1+0.028)^6-1}{0.028}\right] = 30000(6.4360343)$$

$\boldsymbol{A_6 = 193081.029}$ وحدة نقدية

إيجاد الجملة في حالة معدل الفائدة يُحسب على أساس جزء من السنة: إذا كان معدل الفائدة يُحسب على أساس جزء من السنة (سداسي، ثلاثي،...الخ) فإنه في هذه الحالة نقوم بما يلي حسب المثال التالي:

مثال:

يُودع احد الأشخاص في نهاية كل 4 أشهر ولمدة 3 سنوات مبلغ 7000 وحات نقدية لدى أحد البنوك بمعدل فائدة 2%.

المطلوب: اوجد جملة الدفعات في نهاية السنة الثالثة؟

الحل:

$a = 7000$ وحدة نقدية

$i = 2\%$

يُلاحظ أن معدل الفائدة المركب يُحسب على أساس كل 4 أشهر وبالتالي فإن عدد المرات التي يُحسب فيها المعدل هو ثلاثة مرات في السنة وبالتالي 9 مرات في 3 سنوات ومنه: n=9

$$A_n = a\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \Rightarrow A_9 = 7000\left[\frac{(1+0.02)^9 - 1}{0.02}\right] = 7000(9.754628431)$$

$\mathbf{A_9 = 68282.4}$ وحدة نقدية

- إستخدام قانون جملة دفعات نهاية المدة:

باستخدام قانون جملة دفعات نهاية المدة يُمكن تحديد أي عنصر مجهول مع ضرورة معلومية باقي العناصر.

1- تحديد قيمة الدفعة: يُمكن إيجاد قيمة الدفعة بطريقتين:

الطريقة الأولى :

$$A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow \boxed{a = \frac{A_n}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}}}$$

الطريقة الثانية:

يُمكن ايجاد قيمة الدفعة بالقانون التالي:

$$\boxed{a = A_n\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i\right]}$$

ويتم إستخدام الجدول المالي رقم 5 لاستخراج قيمة المقدار $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$

مثال:

يُودع احد الأشخاص في كل نهاية سنة ولمدة 9 سنوات مبلغ من المال بمعدل فائدة مركب 3,75% ليتحصل بعد نهاية المدة على جملة مركبة قدرها 398050,95 دج.

المطلوب: احسب قيمة ما يُودعه الشخص في نهاية كل سنة بطريقتين؟

الحل:

$$A_9 = 398050.95 \text{ دج}$$

$$i = 3.75\%$$

$$n = 9 \text{ دفعات}$$

الطريقة الأولى:

$$a = \frac{A_n}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}} = \frac{A_9}{\frac{(1+0.0375)^9 - 1}{0.0375}} = \frac{398050.95}{10.47502503} \Rightarrow \boxed{a = 38000 \text{ دج}}$$

الطريقة الثانية:

$$a = A_n\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i\right] \Rightarrow a = A_9\left[\frac{0.0375}{1-(1+0.0375)^{-9}} - i\right]$$

$$a = 398050{,}95\left[0{,}132965166 - 0{,}0375\right] = 398050{,}95(0{,}09546517)$$

$$\boxed{a = 38000 \text{ دج}}$$

2- تحديد معدل الفائدة:

إنطلاقا من قانون جملة دفعات نهاية المدة:

$$A_n = a\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \Rightarrow \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A_n}{a}$$

ثم نبحث عن حاصل القسمة $\frac{A_n}{a}$ في الجدول المالي رقم 3 وهنا نكون أمام حالتين:

<u>الحالة الأولى: وجود حاصل القسمة في الجدول المالي:</u> نبحث عن حاصل القسمة $\frac{A_n}{a}$ في السطر الذي تقع فيه n المعلومة، ومعدل الفائدة المبحوث عنه هو المقابل للعمود الذي يقع فيه حاصل القسمة.

<u>مثال:</u>

يُودع احد الأشخاص في كل نهاية سنة ولمدة 4 سنوات مبلغ من المال قدره 6250 دج ليتحصل بعد نهاية المدة

على جملة مركبة قدرها 26540,4 دج

<u>المطلوب</u>: أوجد معدل الفائدة؟

<u>الحل:</u>

$A_4 = 26540.4$ دج

$a = 6250$ دج

$n = 4$ دفعات

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A_n}{a} \Rightarrow \frac{(1+i)^4 - 1}{i} = \frac{26540.4}{6250} = 4.246464$$

نبحث عن القيمة 4,246464 في الجدول المالي رقم 3 عند السطر الذي يقابل n = 4، ونجد هذه القيمة في العمود الذي يقابل معدل فائدة 4% إذا:

$$\boxed{i = 4\%}$$

الحالة الثانية: عدم وجود حاصل القسمة فى الجدول المالى: إذا بحثنا في الجدول المالي رقم 3 عن حاصل القسمة $\frac{A_n}{a}$ ولم نجده فإننا في هذه الحالة نجد معدل الفائدة بطريقة التناسب كما يلي:

- نحدد القيمتين في الجدول المالي التين يقع بينهما حاصل قسمة $\frac{A_n}{a}$ في السطر التي تقع فيه ى المعلومة، ونرمز للقيمة الكبيرة بــ x_1 والقيمة الصغيرة بـ x_2.

- نحدد معدلي الفائدة الذين يقابلان القيمتين المتحصل عليهما في الخطوة السابقة، ونرمز للمعدل الذي يقابل X_1 بـ i_1 والمعدل الذي يقابل X_2 بــ i_2.

ويتم إيجاد معدل الفائدة بالتناسب كما يلي:

$$i = i_2 + \frac{(i_1 - i_2)\left(\frac{A_n}{a} - x_2\right)}{(x_1 - x_2)}$$

مثال:

يُودع احد الأشخاص في كل نهاية سنة ولمدة 5 سنوات مبلغ من المال قدره 3000 دج ليتحصل بعد نهاية المدة على جملة مركبة قدرها 16445دج.

المطلوب: اوجد معدل الفائدة المركب السنوي؟

الحل:

$A_5 = 16445$ دج

$a = 3000$ دج

$n = 5$ دفعات

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A_n}{a} \Rightarrow \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{16445}{3000} = 5{,}481666667$$

يُلاحظ أن هذه القيمة غير موجود في الجدول المالي رقم 3 وبالتالي نجد معدل الفائدة بطريقة التناسب كما يلي:

$$i = i_2 + \frac{(i_1 - i_2) \times (\frac{A_n}{a} - x_2)}{(x_1 - x_2)}$$

$$i = 0{,}045 + \frac{(0{,}0475 - 0{,}045) \times (5{,}481666667 - 5{,}470709726)}{(5{,}49810345 - 5{,}470709726)}$$

$$i = 4{,}599995 \approx \boxed{4{,}6\%}$$

3- تحديد عدد الدفعات :

انطلاقا من قانون جملة دفعات نهاية المدة:

$$A_n = a\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \Rightarrow \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A_n}{a}$$

ثم نبحث عن حاصل القسمة في الجدول المالي رقم 3 وهنا نكون أمام حالتين:

<u>الحالة الأولى: وجود حاصل القسمة في الجدول المالي:</u> نبحث عن حاصل القسمة $\frac{A_n}{a}$ في العمود المقابل لمعدل الفائدة المعلوم، والمدة أو عدد الدفعات المبحوث عنها هي المقابلة للسطر الذي يقع فيه حاصل القسمة.

مثال:

يُودع احد الأشخاص في كل نهاية سنة مبلغ من المال قدره 9070 وحدة نقدية بمعدل فائدة مركب 3,5% ليتحصل بعد نهاية المدة على جملة مركبة قدرها 82098,799 وحدة نقدية.

المطلوب: أوجد عدد الدفعات؟

الحل:

$A_n = 82098,799$ وحدة نقدية

$a = 9070$ وحدة نقدية

$i = 3,5\%$

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A_n}{a} \Rightarrow \frac{(1+0.035)^n - 1}{0.035} = \frac{82098.799}{9070} = 9.05168677$$

نبحث عن القيمة 9,05168677 في الجدول المالي رقم 3 في العمود الذي يقابل معدل فائدة 3,5% ونجد هذه القيمة في السطر الذي يقابل n= 8. إذا:

$n = 8$ دفعات

الحالة الثانية: عدم وجود حاصل القسمة في الجدول المالي: عدم وجود حاصل القسمة تعني أن n هي عدد غير كامل، وهي حالة غير مقبولة لأن n تمثل عدد الدفعات، وعند مصادفة هذه الحالة فإننا نقوم بما يلي:

نبحث في الجدول المالي رقم 3 عن القيمتين اللتين تحصران حاصل قسمة $\frac{An}{a}$ في العمود الذي يقابل معدل الفائدة المعلوم ونحدد عدد الدفعات التي تقابل كل قيمة من هاتين القيمتين، ونرمز لـ n الكبيرة بـ n_1 و n الصغيرة بـ n_2، ومن تم يُمكن الأخذ بأحد الحلول التالية:

1− إعادة حساب قيمة الدفعة في حالة عدد الدفعات يساوي n_1.

2− إعادة حساب قيمة الدفعة في حالة عدد الدفعات يساوي n_2.

3− تعديل قيمة الدفعة الأخيرة: يتم إعادة حساب قيمة الجملة على أساس عدد الدفعات يساوي n_1 أو n_2 ثم يتم تحديد الفارق بين قيمة الجملة المعطاة وقيمة جملة n_1 دفعة (الفرق سالب) أو قيمة جملة n_2 دفعة (الفرق موجب)، والفرق يتم طرحه أو إضافته إلى الدفعة الأخيرة (أي أن الدفعة الأخيرة تصبح غير مساوية للدفعات السابقة).

مثال:

حتى يستطيع شخص تسديد دين جملته 33000 دج بدفعات لنهاية كل سنة قيمتها 4000 دج لكل منها فكم يلزمه من سنة إذا كان معدل الفائدة المستعمل هو 3%.

الحل:

$A_n = 33000$ دج

$a = 4000$ دج

$i = 3\%$

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A_n}{a} \Rightarrow \frac{(1{,}03)^n - 1}{0{,}03} = \frac{33000}{4000} = 8{,}25$$

بالبحث في الجدول المالي رقم 3 نجد أن هذا المقدار محصور بين القيمتين 7,662462181 و8,892336046،

القيمة الأولى تقابل $n_2=7$ والقيمة الثانية تقابل $n_1=8$، ويُمكن الأخذ بأحد الحلول التالية:

الحل الأول: إعادة حساب قيمة الدفعة على أساس n$_1$=8

$$a = \frac{A_n}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}} = \frac{A_8}{\frac{(1,03)^8 - 1}{0,03}} = \frac{33000}{8,892336046} = \mathbf{3711,06} \text{ دج}$$

الحل الثاني: إعادة حساب قيمة الدفعة على أساس n$_2$=7

$$a = \frac{A_n}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}} = \frac{A_7}{\frac{(1,03)^7 - 1}{0,03}} = \frac{33000}{7,662462181} = \mathbf{4306,71} \text{ دج}$$

الحل الثالث: تعديل قيمة الدفعة الأخيرة

في حالة n$_1$=8

$$A_8 = a\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \Rightarrow A_8 = 4000\left[\frac{(1.03)^8 - 1}{0,03}\right] = 4000(8,892336046)$$

$$A_8 = 35569,34 \text{ دج}$$

الفرق هو:

$$33000 - 35569,34 = -2569,34 \text{ دج}$$

قيمة الدفعة الثامنة والأخيرة:

$$4000 - 2569,34 = \mathbf{1430,66} \text{ دج}$$

في حالة n_2=7

$$A_7 = a\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \Rightarrow A_7 = 4000\left[\frac{(1.03)^7 - 1}{0,03}\right] = 4000(7,662462181)$$

$$A_7 = 30649,85 \text{ دج}$$

الفرق هو:

$$33000 - 30649,85 = 2350,15 \text{ دج}$$

قيمة الدفعة السابعة والأخيرة:

$$4000 + 2350,15 = \mathbf{6350,15} \text{ دج}$$

- القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:

- قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:

القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة هي مجموع القيم الحالية لجميع دفعات نهاية المدة أي قيمة الدفعات في الزمن 0، أي فترة قبل الدفعة الأولى.

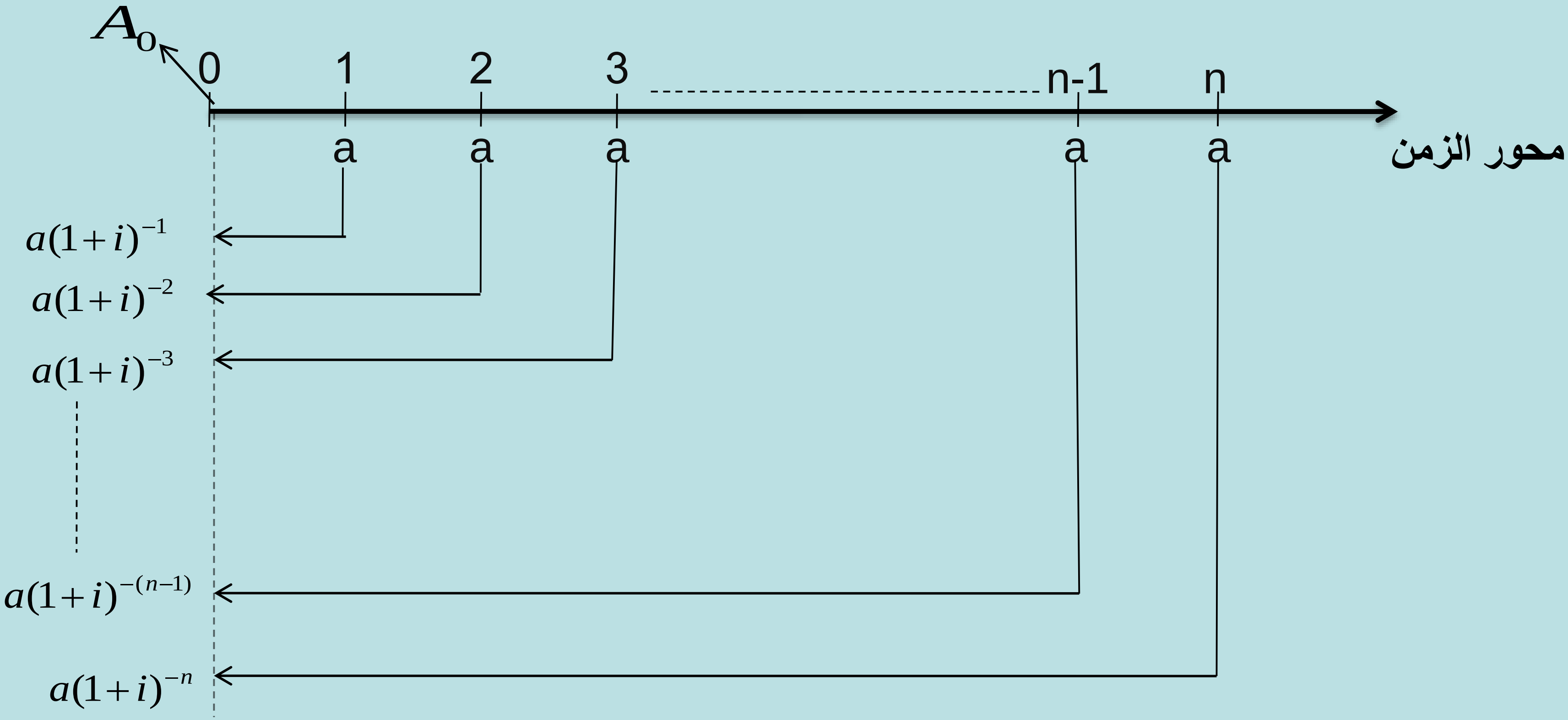
ويُمكن التوصل إلى قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة بطريقتين:

الطريقة الأولى: باستعمال مجموع القيم الحالية للدفعات منفصلة:

لنفترض أن:

A_0 : القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة؛

ويُمكن توضيح مفهوم القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة وطريقة حسابها من خلال الشكل التالي:



والقيمة الحالية للدفعات كاملة A_0 تكون ابتداء من آخر دفعة كما يلي:

$$A_0 = a(1+i)^{-n} + a(1+i)^{-(n-1)} + ... + a(1+i)^{-3} + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-1}$$

وبملاحظة عناصر هذه القيمة الحالية نجد أنها تكون متتالية هندسية متزايدة حدها الأول $a(1+i)^{-n}$ وأساسها $(1+i)$ وعدد حدودها n وبالتالي فإن مجموع المتتالية الهندسية أي مجموع القيم الحالية للدفعات يكون كما يلي:

$$A_0 = a(1+i)^{-n}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}\right] \Rightarrow A_0 = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

ويُمكن الحصول على نفس القانون من خلال حساب القيمة الحالية لجملة الدفعات كما يلي:

$$A_0 = A_n(1+i)^{-n} \Rightarrow A_0 = a\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)^{-n} \Rightarrow A_0 = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

ولحساب القيمة الحالية للدفعات نستعين بالجدول المالي رقم 4 الذي يُقدم العلاقة $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ بشرط وجود المعدل المستعمل في الجدول، وهنا نكون أمام حالتين: حالة وجود معدل الفائدة في الجدول المالي وحالة عدم وجوده.

- حالة وجود معدل الفائدة فى الجدول المالى:

مثال:

يسدد شخص في نهاية كل سنة ولمدة 9 سنوات مبلغ 5600 دج بمعدل فائدة 5.5%.

المطلوب: احسب القيمة الحالية لهذه الدفعات؟

الحل:

$a = 5600$ دج

$i = 5.5\%$

$n = 9$ دفعات

$$A_0 = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \Rightarrow A_0 = 5600\left[\frac{1-(1+0.055)^{-9}}{0.055}\right] = 5600(6.952195249)$$

$$\boxed{A_0 = 38932.3 \text{ دج}}$$

- **حالة عدم وجود معدل الفائدة في الجدول المالي:** في هذه الحالة يتم حساب القيمة الحالية باستخدام طريقة التناسب كما يلي:

ليكن i هو المعدل غير المجدول: نحدد المعدلين المجدولين الذين يحصران المعدل غير المجدول وليكن المعدل الكبير i_1 والمعدل الصغير i_2، وبطريقة التناسب نجد المقدار $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ كما يلي:

$$\boxed{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1-(1+i_2)^{-n}}{i_2} - \frac{\left(\frac{1-(1+i_2)^{-n}}{i_2} - \frac{1-(1+i_1)^{-n}}{i_1}\right)\times(i-i_2)}{(i_1-i_2)}}$$

ثم نقوم بعد ذلك باستخدام المقدار $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ في حساب القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة.

مثال:

يسدد شخص في نهاية كل سنة ولمدة 4 سنوات مبلغ 3100 دج بمعدل فائدة 6.7%.

المطلوب: احسب القيمة الحالية لهذه الدفعات؟

الحل:

$$a = 3100 \text{ دج}$$

$$i = 6.7\%$$

$$n = 4 \text{ دفعات}$$

نلاحظ أن معدل الفائدة 6.7% غير موجود في الجدول المالي وهو محصور بين $i_1=6.75\%$ و $i_2=6.5\%$

وبطريقة التناسب:

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1-(1+i_2)^{-n}}{i_2} - \frac{\left(\frac{1-(1+i_2)^{-n}}{i_2} - \frac{1-(1+i_1)^{-n}}{i_1}\right)\times(i-i_2)}{(i_1-i_2)}$$

$$\frac{1-(1+0.067)^{-4}}{i} = \frac{1-(1+0.065)^{-4}}{0.065} - \frac{\left(\frac{1-(1+0.065)^{-4}}{0.065} - \frac{1-(1+0.0675)^{-4}}{0.0675}\right)\times(0.067-0.065)}{(0.0675-0.065)}$$

$$\frac{1-(1+0.067)^{-4}}{i} = 3.42579866 - \frac{(3.4257986-3.40641606)\times(0.002)}{(0.0025)} = 3{,}41029256$$

$$A_0 = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \Rightarrow A_0 = 3100\left[\frac{1-(1+0.067)^{-4}}{0.067}\right] = 3100(3{,}410292568)$$

$$\boxed{A_0 = 10571.91 \text{ دج}}$$

- إستخدام قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:

باستخدام قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة يُمكن تحديد أي عنصر مجهول مع ضرورة معلومية باقي العناصر

1- تحديد قيمة الدفعة: يُمكن إيجاد قيمة الدفعة كما يلي:

$$A_0 = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \Rightarrow a = \frac{A_0}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \Rightarrow a = A_0\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

ونستخدم الجدول المالي رقم 5 لاستخراج قيمة المقدار $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$

<u>مثال:</u>

سدد أحد الأشخاص 5 دفعات، كل دفعة يتم دفعها في نهاية كل ستة أشهر، بمعدل فائدة 7,5%، القيمة الحالية لتلك الدفعات تُقدر بـ 14969,774 وحدة نقدية.

<u>المطلوب</u>: احسب قيمة الدفعة؟

<u>الحل:</u>

$A_0 = 14969{,}774$ وحدة نقدية

$i = 7{,}5\%$

$n = 5$ دفعات

$$a = A_0\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] \Rightarrow a = 14969{,}774\frac{0{,}075}{1-(1+0{,}075)^{-5}} \Rightarrow a = 14969{,}774(0{,}24716472)$$

$\boldsymbol{a = 3700}$ وحدة نقدية

2- تحديد معدل الفائدة:

انطلاقا من قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:

$$A_0 = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A_0}{a}$$

ثم نبحث عن حاصل القسمة في الجدول المالي رقم 4 وهنا نكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود حاصل القسمة في الجدول المالي: نبحث عن حاصل القسمة في السطر الذي تقع فيه المدة أو عدد الدفعات المعلومة ومعدل الفائدة المبحوث عنه هو الذي يقع في العمود الذي يقع فيه حاصل القسمة.

مثال:

سلسلة دفعات ثابتة قيمة كل منها 9002 وحدة نقدية لمدة 4 فترات كانت قيمتها الحالية 30839,039 وحدة نقدية

المطلوب: اوجد معدل الفائدة المطبق؟

الحل:

$A_0 = 30839{,}039$ وحدة نقدية

$a = 9002$ وحدة نقدية

$n = 4$ دفعات

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A_0}{a} \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-4}}{i} = \frac{30839{,}039}{9002} = 3{,}4257986$$

نبحث عن المقدار 3,4257986 في الجدول المالي رقم 4 عند السطر الذي يقابل 4 فترات ونجد تلك القيمة عند العمود الذي يقابل معدل فائدة 6,5% إذا:

$$\boxed{i = 6{,}5\%}$$

الحالة الثانية: عدم وجود حاصل القسمة في الجدول المالي: إذا بحثنا في الجدول المالي رقم 4 عن حاصل القسمة ولم نجده فإننا في هذه الحالة نجد المعدل بطريقة التناسب كما يلي:

- نحدد القيمتين في الجدول المالي التي يقع بينهما حاصل قسمة $\frac{A_0}{a}$ عند السطر التي تقع فيه المدة أو عدد الدفعات المعلومة ونرمز للقيمة الكبرى بـ x_1 ومعدل الفائدة المقابل بـ i_2 ونرمز للقيمة الصغرى x_2 ومعدل الفائدة المقابل بـ i_1.

ويتم إيجاد معدل الفائدة بالتناسب كما يلي:

$$\boxed{i = i_1 - \frac{(\frac{A_0}{a} - x_2)(i_1 - i_2)}{(x_1 - x_2)}}$$

مثال

7 دفعات سنوية متساوية قيمة كل واحدة منها 5000 دج قيمتها الحالية 28011,8 دج.

المطلوب: أوجد معدل الفائدة المركب السنوي المطبق؟

الحل:

$$A_0 = 28011{,}8 \text{ دج}$$

$$a = 5000 \text{ دج}$$

$$n = 7 \text{ دفعات}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A_0}{a} \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-7}}{i} = \frac{28011{,}8}{5000} = 5{,}60236$$

يُلاحظ أن هذا المقدار غير موجود في الجدول المالي وبالتالي نجد معدل الفائدة بطريقة التناسب كما يلي:

$$i = i_1 - \frac{\left(\frac{A_0}{a} - x_2\right)(i_1 - i_2)}{(x_1 - x_2)} \Rightarrow i = 0{,}06 - \frac{(5{,}60236 - 5{,}58238144)(0{,}06 - 0{,}0575)}{(5{,}632327833 - 5{,}58238144)}$$

$$i = 0{,}058999999 \approx 0{,}059 = \boxed{\boxed{5{,}9\%}}$$

3- تحديد عدد الدفعات :

انطلاقا من قانون القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:

$$A_0 = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A_0}{a}$$

ثم نبحث عن حاصل القسم $\frac{A_0}{a}$ في الجدول المالي رقم 4 وهنا نكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود حاصل القسمة في الجدول المالي: نبحث عن حاصل القسمة في العمود الذي يقع فيه معدل الفائدة المعلوم والمدة أو عدد الدفعات المبحوث عنها هي التي تقع في السطر الذي يقع فيه حاصل القسمة.

مثال:

سلسلة دفعات متساوية قيمة كل واحدة منها 4264 دج تُدفع في نهاية كل سنة، القيمة الحالية لهذه الدفعات هو 22979,93دج، ومعدل الفائدة 7%

المطلوب: أوجد عدد الدفعات؟

الحل:

$$A_0 = 22979{,}93 \text{ دج}$$

$$a = 4264 \text{ دج}$$

$$i = 7\%$$

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A_0}{a} \Rightarrow \frac{1-(1+0.07)^{-n}}{0.07} = \frac{22979{,}93}{4264} = 5{,}389289402$$

نبحث عن المقدار 5,3892894 في الجدول المالي رقم 4 عند العمود الذي يقابل معدل فائدة 7% ونجد تلك القيمة عند السطر الذي يقابل مدة 7 دفعات. إذا:

$$n = 7 \text{ دفعات}$$

الحالة الثانية: عدم وجود حاصل القسمة في الجدول المالي: عدم وجود حاصل القسمة تعني أن n هي عدد غير كامل، وهي حالة غير مقبولة لأن n تمثل عدد الدفعات، وعند مصادفة هذه الحالة فإننا نقوم بما يلي:

نبحث في الجدول المالي رقم 4 عن القيمتين اللتين تحصران حاصل قسمة $\frac{A_0}{a}$ في العمود الذي يقابل معدل الفائدة المعلوم ونحدد عدد الدفعات التي تقابل كل قيمة من هاتين القيمتين، ونرمز لـ n الكبيرة بـ n_1 و n الصغيرة بـ n_2، ومن تم يُمكن الأخذ بأحد الحلول التالية:

1- إعادة حساب قيمة الدفعة في حالة عدد الدفعات يساوي n_1.

2- إعادة حساب قيمة الدفعة في حالة عدد الدفعات يساوي n_2.

3- تعديل قيمة الدفعة الأخيرة: يتم إعادة حساب القيمة الحالية على أساس عدد الدفعات يساوي n_1 أو n_2 ثم يتم تحديد الفارق بين القيمة الحالية المعطاة والقيمة الحالية المحسوبة على أساس n_1 دفعة (الفرق سالب) أو القيمة الحالية المحسوبة على أساس n_2 دفعة (الفرق موجب)، والفرق يتم طرحه أو إضافته إلى الدفعة الأخيرة (أي أن الدفعة الأخيرة تصبح غير مساوية للدفعات السابقة).

مثال:

اشترت إحدى المؤسسات سيارة بقيمة 36300 دج واتفقت على تسديد قيمتها بأقساط متساوية قيمة الواحدة 6000 دج تُدفع في نهاية كل سنة بمعدل فائدة 1,75%

المطلوب: اوجد عدد الدفعات؟

الحل:

$A_0 = 34044$ دج

$a = 6000$ دج

$i = 1,75\%$

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A_0}{a} \Rightarrow \frac{1-(1+0,0175)^{-n}}{0,0175} = \frac{36300}{6000} = 6,05$$

بالبحث في الجدول المالي رقم 4 عن حاصل القسمة نجد أن هذا المقدار محصور بين 5,648997617 و 6,534641393، القيمة الأولى تقابل $n_2=6$ والقيمة الثانية تقابل $n_1=7$، ويُمكن الأخذ بأحد الحلول التالية:

- الحل الأول: إعادة حساب قيمة الدفعة على أساس n_1=7

$$a = A_0\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] = 36300\left[\frac{0,0175}{1-(1.0175)^{-7}}\right] = 36300(0,15303059)$$

$$a = 5555,01 \text{ دج}$$

الحل الثاني: إعادة حساب قيمة الدفعة على أساس n_2=6

$$a = A_0\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] = 36300\left[\frac{0,0175}{1-(1.0175)^{-6}}\right] = 36300(0,17702256)$$

$$a = 6425,92 \text{ دج}$$

الحل الثالث: تعديل قيمة الدفعة الأخيرة

في حالة $n_1=7$

$$A_0 = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \Rightarrow A_0 = 6000\left[\frac{1-(1.0175)^{-7}}{0,0175}\right] = 6000(6,534641393)$$

$A_0 = 39207,85$ دج

الفرق هو:

$$36300 - 39207,85 = -2907,85 \text{ دج}$$

قيمة الدفعة السابعة والأخيرة:

$$6000 - 2907,85 = \mathbf{3092,15} \text{ دج}$$

في حالة $n_2=6$

$$A_0 = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \Rightarrow A_0 = 6000\left[\frac{1-(1.0175)^{-6}}{0,0175}\right] = 6000(5,648997617)$$

$A_0 = 33893,99$ دج

الفرق هو:

$$36300 - 33893,99 = 2406,01 \text{ دج}$$

قيمة الدفعة السادسة والأخيرة:

$$6000 + 2406,01 = \mathbf{8406,01} \text{ دج}$$

مدة الإستحقاق المتوسط:

هي المدة التي يتساوى فيها مجموع قيم جميع الدفعات مع جملة القيمة الحالية للدفعات في هذه المدة.

لدينا:

$$a \times n = A_0(1+i)^m$$

حيث تعبر m عن مدة الإستحقاق المتوسط

$$a \times n = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^m \Rightarrow (1+i)^m = \frac{n}{\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]}$$

$$\boldsymbol{(1+i)^m = n\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]}$$

حيث يتم إستخراج قيمة المقدار $\boldsymbol{\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}}$ من الجدول المالي رقم 5.

ويتم إيجاد قيمة m سواء باستخدام الطريقة اللوغارتيمية أو باستخدام التناسب كما يلي:

نحدد القيمتين في الجدول المالي رقم 1 التي تقع بينهما قيمة $\boldsymbol{(1+i)^m}$ في العمود التي يقع فيه معدل الفائدة، ونرمز للقيمة الكبرى بـ x_1 و n المقابلة بـ n_1، ونرمز للقيمة الصغرى بـ x_2 و n المقابلة بـ n_2.

$$m = n_2 + \left[\frac{(1+i)^m - x_2}{x_1 - x_2}\right] \times 360$$

مثال:

يُودع أحد الأشخاص في نهاية كل سنة ولمدة 7 سنوات مبلغ 2000 وحدة نقدية لدى أحد البنوك بمعدل فائدة مركب 3,5%.

المطلوب: أوجد مدة الإستحقاق المتوسط؟

الحل:

$$(1+\mathrm{i})^{\mathrm{m}} = \mathrm{n}\left[\frac{\mathrm{i}}{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}}\right]$$

$$(1{,}035)^{\mathrm{m}} = 7\left[\frac{0{,}035}{1-(1{,}035)^{-7}}\right] = 7(0{,}163544494) = 1{,}144811458$$

$$m = n_2 + \left[\frac{(1+i)^m - x_2}{x_1 - x_2}\right] \times 360$$

$$m = 3 + \left[\frac{1{,}144811458 - 1{,}108717875}{1{,}147523001 - 1{,}108717875}\right] \times 360 = 3 + 334{,}84$$

$\boldsymbol{m} = \mathbf{3}$ سنوات و$\mathbf{335}$ يوم

الطريقة اللوغاريتمية:

$$(1{,}035)^{\mathrm{m}} = 1{,}144811458$$

$$log(1{,}035)^{\mathrm{m}} = \log(1{,}144811458\ )$$

$$m = \frac{\log(1{,}144811458\ )}{log(1{,}035)} = \frac{0{,}0587339675}{0{,}0149403498} = 3{,}9312310813$$

$360 \times 0{,}9312310811 = 335{,}24$ يوم

$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{3}$ سنوات و$\boldsymbol{335}$ يوم

- دفعات بداية المدة:

- جملة دفعات بداية المدة:

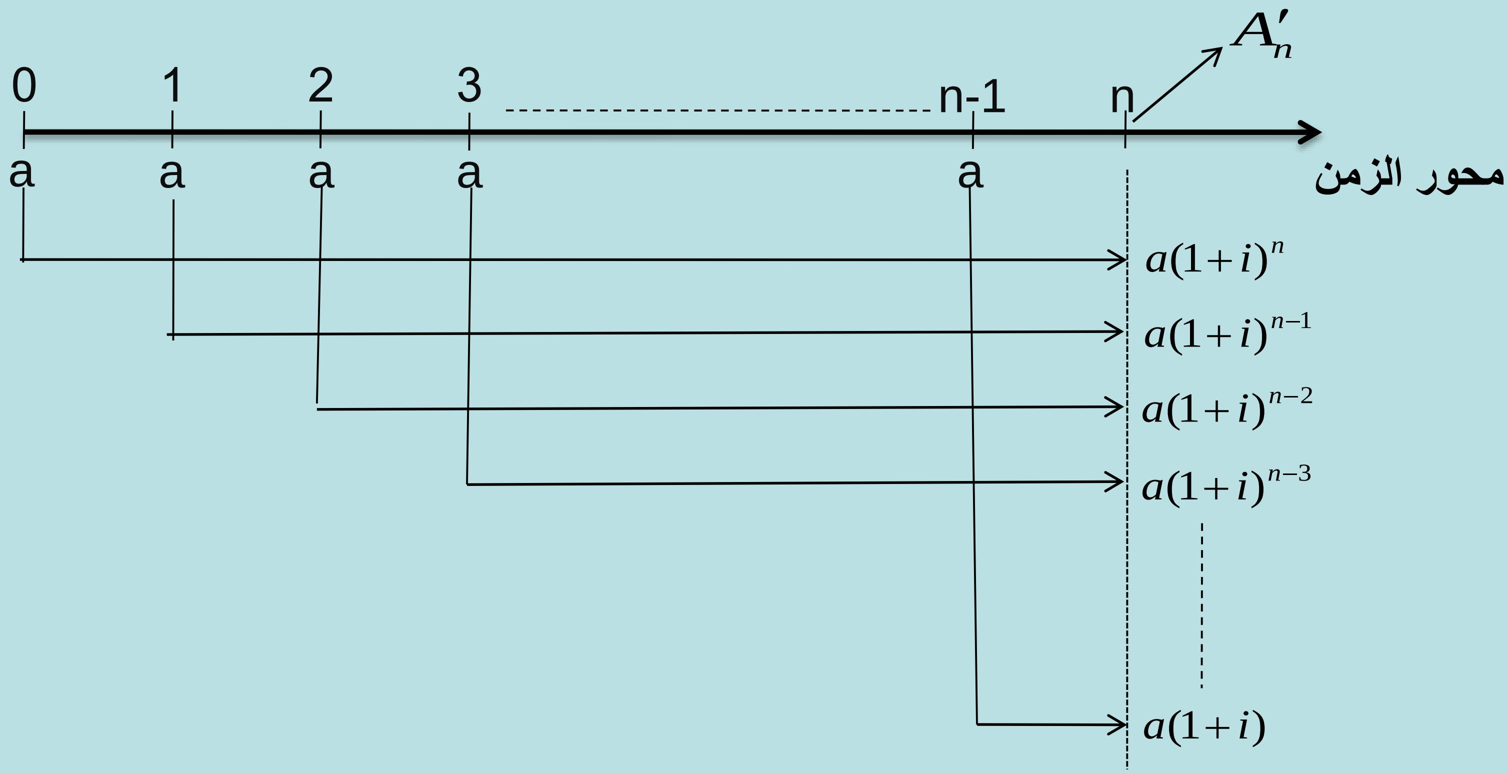
تُحسب جملة دفعات بداية المدة بعد فترة من تسديد الدفعة الأخيرة، وتكون هذه الفترة مساوية للفترة الفاصلة بين كل دفعتين.

- قانون جملة دفعات بداية المدة:

لنفترض أن:

A'_n : جملة دفعات بداية المدة؛

ويُمكن توضيح مفهوم جملة دفعات بداية المدة وطريقة حسابها من خلال الشكل التالي:



وجملة الدفعات كاملة A'_n تكون ابتداء من آخر دفعة كما يلي:

$$A'_n = a(1+i) + \ldots + a(1+i)^{n-3} + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^n$$

وبملاحظة عناصر هذه الجملة نجد أنها تكون متتالية هندسية متزايدة حدها الأول $a(1+i)$ وأساسها $(1+i)$ وعدد حدودها n وبالتالي فإن مجموع المتتالية الهندسية أي جملة الدفعات يكون كما يلي:

$$A'_n = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} \Rightarrow \boxed{A`_n = a(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]}$$

ولحساب جملة دفعات بداية المدة هنا نستعمل الجدول المالي رقم 3 لاستخراج العلاقة $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

ويُمكن تكوين علاقة جديدة لحساب جملة دفعات بداية المدة من خلال القانون السابق كما يلي:

$$A`_n = a(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = a\left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}\right] = a\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - \frac{i}{i}\right]$$

$$\boxed{A'_n = a\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]}$$

وهنا أيضا نقوم باستخدام الجدول المالي رقم 3 لاستخراج العلاقة $\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i}$

ويُمكن مقارنة جملة دفعات بداية المدة وجملة دفعات نهاية المدة كما يلي:

$$\grave{A}_n = a(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \qquad A_n = a\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

من خلال كل من القانونين يُمكن ملاحظة أن:

$$\boxed{A'_n = A_n(1+i)}$$

ولحساب جملة دفعات بداية المدة نستعين بالجدول المالي رقم 3 الذي يُقدم العلاقة $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ أو العلاقة $\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i}$ بشرط وجود المعدل المستعمل في الجدول، وهنا نكون أمام حالتين:

- حالة وجود معدل الفائدة في الجدول:

مثال:

أراد شخص تكوين رأس مال بـ 7 دفعات متساوية مبلغ الواحدة 5000 دج، تدفع الأولى عند إمضاء العقد.
معدل الفائدة السنوي 2%.
المطلوب: ماهو مبلغ رأس المال؟

الحل:

$a = 5000$
$i = 2\%$
$n = 7$ دفعات

استخدام القانون الأول:

$$A_n^{`} = a(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \Rightarrow A_7^{`} = 5000(1{,}02)\left[\frac{(1{,}02)^7 - 1}{0{,}02}\right] = 5000(1{,}02)(7{,}434283382)$$

$$\boxed{A_7^{\prime} = 37914{,}85 \text{ دج}}$$

استخدام القانون الثاني:

$$A_n^{`} = a\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right] \Rightarrow A_7^{`} = 5000\left[\frac{(1{,}02)^8 - 1}{0{,}02} - 1\right] = 5000(8{,}58296905 - 1)$$

$$\boxed{A_7^{\prime} = 37914{,}85 \text{ دج}}$$

- **حالة عدم وجود معدل الفائدة في الجدول:** في هذه الحالة يتم حساب الجملة باستخدام طريقة التناسب كما يلي:

ليكن i هو المعدل غيرالمجدول: نحدد المعدلين المجدولين الذين يحصران المعدل غير المجدول وليكن المعدل الكبير i_1 والمعدل الصغير i_2 وبطريقة التناسب نكتب :

$$\boxed{\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}=\frac{(1+i_2)^{n+1}-1}{i_2}+\frac{\left(\frac{(1+i_1)^{n+1}-1}{i_1}-\frac{(1+i_2)^{n+1}-1}{i_2}\right)\times(i-i_2)}{(i_1-i_2)}}$$

ثم نقوم بعد ذلك باستخدام $\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}$ في حساب جملة دفعات بداية المدة.

مثال:

احسب جملة 4 دفعات متساوية قيمة الواحدة 8300 دج الأولى تُدفع في بداية السنة الأولى بمعدل فائدة 4,6%.

الحل:

$a = 8300$ دج

$i = 4,6\%$

$n = 4$ دفعات

لدينا معدل فائدة 4,6% وهو معدل غير موجود في الجدول المالي وهو معدل محصور بين المعدلين المجدولين i_1 %=4,75% و i_2=4,5% ومنه:

$$\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} = \frac{(1+i_2)^{n+1}-1}{i_2} + \frac{\left(\frac{(1+i_1)^{n+1}-1}{i_1} - \frac{(1+i_2)^{n+1}-1}{i_2}\right)\times(i-i_2)}{(i_1-i_2)}$$

$$\frac{(1+0,046)^{4+1}-1}{0,046} = \frac{(1+0,045)^{4+1}-1}{0,045} + \frac{\left(\frac{(1+0,0475)^{4+1}-1}{0,0475} - \frac{(1+0,045)^{4+1}-1}{0,045}\right)\times(0,046-0,045)}{(0,0475-0,045)}$$

$$\frac{(1+0,046)^{4+1}-1}{0,046} = 5,47070973 + \frac{(5,49810345-5,47070973)\times(0,001)}{(0,0025)} = 5,481667218$$

$$A'_4 = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right] \Rightarrow A'_4 = 8300\left[\frac{(1+0,046)^{4+1}-1}{0,046}-1\right] = 8300(5,481667218-1)$$

$\boldsymbol{A'_4 = 37197.84}$ وحدة نقدية

-إستخدام قانون جملة دفعات بداية المدة:

باستخدام قانون جملة دفعات بداية المدة يُمكن تحديد أي عنصر مجهول فيها مع ضرورة معلومية باقي العناصر.

1- تحديد قيمة الدفعة:

لدينا :

$$\grave{A}_n = a(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

ويمكن إيجاد قيمة الدفعة كما يلي:

$$a = \grave{A}_n (1+i)^{-1}\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

وبما أن المقدار $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$ لا يوجد في الجداول المالية، فإنه يُمكن التصرف فيه للحصول على علاقة موجودة في الجداول المالية كما يلي:

نستخدم المقدار $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ الموجود في الجدول المالي رقم 5 $a = A'_n (1+i)^{-1} \frac{i}{(1+i)^n - 1}$

نضرب المقدار السابق في المقدار التالي : $\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}$

نطرح المقدار $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$ من حاصل الضرب السابق. ومنه:

$$\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \times \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n} - \frac{i}{(1+i)^n-1} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1} - \frac{i}{(1+i)^n-1}$$

$$= \frac{i(1+i)^n - i}{(1+i)^n-1} = \frac{i\left[(1+i)^n-1\right]}{(1+i)^n-1} = i$$

وبالتالي عند البحث عن المقدار $\frac{i}{(1+i)^n-1}$ فإننا نستخرج المقدار $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ من الجدول المالي رقم 5 ونطرح منه i. وبالتالي يُمكن إيجاد قيمة الدفعة كما يلي:

$$\boxed{a = A'_n (1+i)^{-1}\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i\right]}$$

مثال:

اوجد قيمة الدفعة إذا علمت أن الجملة التي تكونت بـ 7 دفعات متساوية تساوي 85635,85 دج بمعدل فائدة 8% وأن أول دفعة تم دفعها كانت في بداية الفترة؟

الحل:

$$A'_7 = 85635{,}85 \text{ دج}$$

$$i = 8\%$$

$$n = 7 \text{ دفعات}$$

$$a = A'_n (1+i)^{-1}\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i\right] \Rightarrow a = A'_7 (1+0{,}08)^{-1}\left[\frac{0.08}{1-(1+0.08)^{-7}} - 0{,}08\right]$$

$$a = 85635{,}85(0{,}925925926)(0{,}192072401 - 0{,}08)$$

$$\boxed{a = 8886{,}5 \text{ دج}}$$

2- تحديد معدل الفائدة:

انطلاقا من قانون جملة دفعات بداية المدة:

$$A'_n = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right] \Rightarrow \frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1=\frac{A'_n}{a} \Rightarrow \boxed{\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}=\frac{A'_n}{a}+1}$$

ثم نبحث عن قيمة الطرف الثاني في الجدول المالي رقم 3 وهنا نكون أمام حالتين:

<u>الحالة الأولى: وجود قيمة الطرف الثاني في الجدول المالي:</u> نبحث عن قيمة الطرف الثاني في السطر الذي تقع فيه المدة المعلومة، ومعدل الفائدة المبحوث عنه هو الذي يقع في العمود الذي تقع فيه قيمة الطرف الثاني.

<u>مثال:</u>

كون احد الأشخاص رأس مال قدره 15608,04دج عن طريق 3 دفعات متساوية قيمة الواحدة 5000دج، الأولى كانت في بداية السنة.

<u>المطلوب</u>: اوجد معدل الفائدة؟

<u>الحل:</u>

$A'_3 = 15608{,}04$ دج

$a = 5000$ دج

$n = 3$ دفعات

$$\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}=\frac{A'_n}{a}+1 \Rightarrow \frac{(1+i)^{3+1}-1}{i}=\frac{15608{,}04}{5000}+1=4{,}121608$$

نبحث عن المقدار 4,121608 في الجدول المالي رقم 3 عند السطر الذي يقابل 4 فترات ونجد تلك القيمة عند العمود الذي يقابل معدل فائدة 2% إذا:

$$\boxed{i = 2\%}$$

الحالة الثانية: عدم وجود قيمة الطرف الثاني في الجدول المالي: إذا بحثنا في الجدول المالي رقم 3 عن قيمة الطرف الثاني ولم نجده فإننا في هذه الحالة نجد المعدل بطريقة التناسب كما يلي:

- نحدد القيمتين في الجدول المالي التي تقع بينهما قيمة الطرف الثاني $\frac{A'_n}{a}+1$ عند السطر التي تقع فيه المدة المعلومة، ونرمز للقيمة الكبرى ب x_1 والقيمة الصغرى x_2.

- نحدد معدلي الفائدة الذين يقابلان القيمتين المتحصل عليهما في الخطوة السابقة ونرمز للمعدل الذي يقابل X_1 بـ i_1 والمعدل الذي يقابل X_2 بـ i_2؛

ويتم إيجاد معدل الفائدة بالتناسب كما يلي:

$$\boxed{i = i_2 + \frac{(i_1 - i_2)\times((\frac{A'_n}{a}+1) - x_2)}{(x_1 - x_2)}}$$

مثال:

كون أحد الأشخاص رأس مال قدره 26587,45دج عن طريق 5 دفعات سنوية متساوية قيمة كل واحدة منها 4748 دج، الدفعة الأولى تم دفعها في بداية السنة الأولى.**الحل:**

المطلوب: أوجد معدل الفائدة المركب السنوي؟

$$A'_5 = 26587{,}45 \text{دج}$$

$$a = 4748 \text{دج}$$

$$n = 5 \text{دفعات}$$

$$\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} = \frac{A'_n}{a} + 1 \Rightarrow \frac{(1+i)^{5+1}-1}{i} = \frac{26587{,}45}{4748} + 1 = 5{,}59971567 + 1 = 6{,}59971567$$

بالبحث في الجدول المالي رقم 3 عند السطر الذي يقابل n=6 نلاحظ أن هذا المقدار غير موجود وبالتالي نجد المعدل بطريقة التناسب كما يلي:

المقدار 6.59971567 محصور بين $x_1=6.632975462$ والذي يقابله $i_1=4\%$ و $x_2=6.591427955$ والذي يقابله $i_2=3.75\%$، ومنه:

$$i = i_2 + \frac{(i_1 - i_2) \times ((\frac{A'_n}{a} + 1) - x_2)}{(x_1 - x_2)}$$

$$i = 0.0375 + \frac{(0.04 - 0.0375) \times (6.59971567 - 6.591427955)}{(6.632975462 - 6,591427955)}$$

$$i = 0.0375 + 0.0004986891 = 0.03799869 \approx 0.038 = \boxed{3,8\%}$$

3- تحدبد عدد الدفعات :

انطلاقا من قانون جملة دفعات بداية المدة:

$$A'_n = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right] \Rightarrow \frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} = \frac{A'_n}{a}+1$$

ثم نبحث عن قيمة الطرف الثاني في الجدول المالي رقم 3 وهنا نكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود الطرف الثاني في الجدول المالي: نبحث عن الطرف الثاني في العمود الذي يقع فيه معدل الفائدة المعلوم، والمدة أو عدد الدفعات المبحوث عنه هو الذي يقع في السطر الذي تقع فيه قيمة الطرف الثاني.

مثال:

كون احد الأشخاص رأس مال قدره 28778,94دج بـدفعات متساوية مبلغ الواحدة 5302دج، تدفع الأولى عند بداية المدة. معدل الفائدة السنوي 2,75%.

المطلوب: اوجد عدد الدفعات التي سمحت بتكوين رأس المال؟

الحل:

$$A'_n = 28778{,}94 \text{دج}$$

$$a = 5302 \text{دج}$$

$$i = 2{,}75\%$$

$$\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} = \frac{A'_n}{a}+1 \Rightarrow \frac{(1+0.0275)^{n+1}-1}{0.0275} = \frac{28778{,}94}{5302}+1 = 5{,}4279404+1 = 6{,}4279404$$

نبحث عن المقدار 6,4279404 في الجدول المالي رقم 3 في العمود الذي يقابل معدل فائدة 2,75% ونجد تلك القيمة عند السطر الذي يقابل 6. ومنه:

$$\boxed{n = 6-1 = 5 \text{ دفعات}}$$

الحالة الثانية: عدم وجود قيمة الطرف الثاني في الجدول المالي: عدم وجود حاصل القسمة تعني أن n هي عدد غير كامل، وهي حالة غير مقبولة لأن n تمثل عدد الدفعات، وعند مصادفة هذه الحالة فإننا نقوم بما يلي:

نبحث في الجدول المالي رقم 3 عن القيمتين اللتين تحصران المقدار $1 + \frac{A'_n}{a}$ في العمود الذي يقابل معدل الفائدة المعلوم ونحدد عدد الدفعات التي تقابل تلك القيمتين ونرمز لـ n الكبيرة بـ n_1 و n الصغيرة بـ n_2، ومن تم يُمكن الأخذ بأحد الحلول التالية:

1- إعادة حساب قيمة الدفعة في حالة عدد الدفعات يساوي n_1.

2- إعادة حساب قيمة الدفعة في حالة عدد الدفعات يساوي n_2.

3- تعديل قيمة الدفعة الأخيرة: يتم إعادة حساب قيمة الجملة على أساس عدد الدفعات يساوي n_1 أو n_2 ثم يتم تحديد الفارق بين قيمة الجملة المعطاة وقيمة جملة n_1 دفعة (الفرق سالب) أو قيمة جملة n_2 دفعة (الفرق موجب)، والفرق يتم طرحه أو إضافته إلى الدفعة الأخيرة (أي أن الدفعة الأخيرة تصبح غير مساوية للدفعات السابقة).

مثال:

كون أحد الأشخاص رأس مال قدره 61005 دج بدفعات متساوية مبلغ الواحدة 8300 دج، تدفع الأولى عند بداية كل سنة. معدل الفائدة السنوي 4%.

المطلوب: اوجد عدد الدفعات التي سمحت بتكوين رأس المال؟

الحل:

$\grave{A_n} = 61005$ دج

$a = 8300$ دج

$i = 4\%$

$$\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} = \frac{\grave{A_n}}{a} + 1 \Rightarrow \frac{(1{,}04)^{n+1}-1}{0{,}04} = \frac{61005}{8300} + 1 = 8{,}35$$

بالبحث في الجدول المالي رقم 3 نجد أن هذا المقدار محصور بين القيمتين 7,898294481 و9,21422626، القيمة الأولى تقابل $n_2+1=7$ والقيمة الثانية تقابل $n_1+1=8$، إذا: $n_2=6$ و $n_1=7$ ، ويُمكن الأخذ بأحد الحلول التالية:

الحل الأول: إعادة حساب قيمة الدفعة على أساس $n_1=7$

$$a = A^{`}_{n}(1+i)^{-1}\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i\right] \Rightarrow a = A^{`}_{7}(1{,}04)^{-1}\left[\frac{0{,}04}{1-(1{,}04)^{-7}} - 0{,}04\right]$$

$$a = 61005(0{,}961538462)(0{,}166609612 - 0{,}04) = \mathbf{7426,75} \text{ دج}$$

الحل الثانى: إعادة حساب قيمة الدفعة على أساس $n_2=6$

$$a = A^{`}_{n}(1+i)^{-1}\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i\right] \Rightarrow a = A^{`}_{6}(1{,}04)^{-1}\left[\frac{0{,}04}{1-(1{,}04)^{-6}} - 0{,}04\right]$$

$$a = 61005(0{,}961538462)(0{,}190761903 - 0{,}04) = \mathbf{8843,49} \text{ دج}$$

الحل الثالث: تعديل قيمة الدفعة الأخيرة

في حالة $n_1=7$

$$\grave{A_n} = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1\right] \Rightarrow \grave{A_7} = 8300\left[\frac{(1{,}04)^{7+1}-1}{0{,}04} - 1\right]$$

$$\grave{A_7} = 8300(9{,}21422626 - 1) = \mathbf{68178{,}08}\ \text{دج}$$

الفرق هو:

$$61005 - 68178{,}08 = -7173{,}08\ \text{دج}$$

قيمة الدفعة السابعة والأخيرة:

$$8300 - 7173{,}08 = \mathbf{1126{,}92}\ \text{دج}$$

في حالة $n_2=6$

$$\grave{A_n} = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1\right] \Rightarrow \grave{A_6} = 8300\left[\frac{(1{,}04)^{6+1}-1}{0{,}04} - 1\right]$$

$$\grave{A_6} = 8300(7{,}898294481 - 1) = \mathbf{57255{,}84}\ \text{دج}$$

الفرق هو:

$$61005 - 57255{,}84 = 3749{,}16\ \text{دج}$$

قيمة الدفعة السادسة والأخيرة:

$$8300 + 3749{,}16 = \mathbf{12049{,}16}\ \text{دج}$$

- القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

- قانون القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

القيمة الحالية لدفعات بداية المدة هي قيمة هذه الدفعات كلها في تاريخ أول مدة الإيداع أي عند الفترة 0 من الإيداع، ويتوافق هذا التاريخ مع تاريخ إيداع أول دفعة من سلسلة الدفعات.

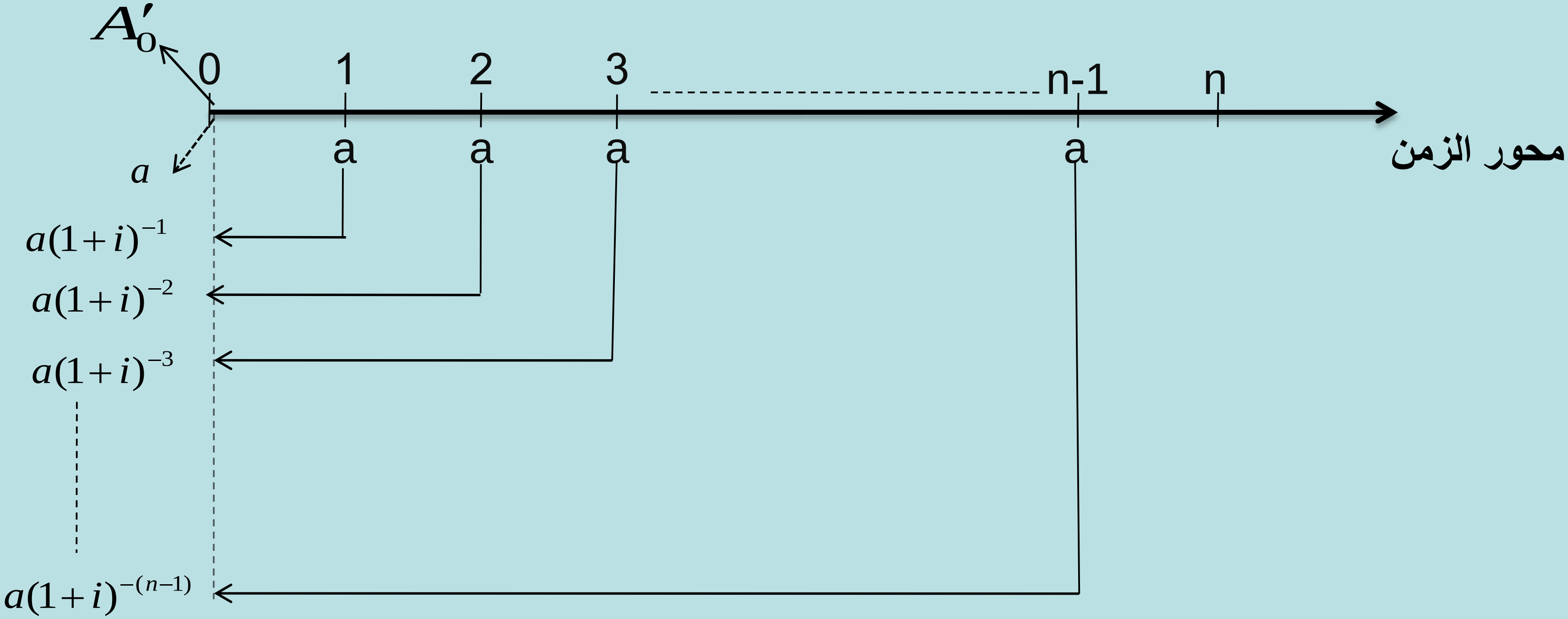
ويُمكن التوصل إلى قانون القيمة الحالية لدفعات بداية المدة بطريقتين:

الطريقة الأولى: باستعمال مجموع القيم الحالية للدفعات منفصلة:

لنفترض أن:

A'_0 : القيمة الحالية لدفعات بداية المدة؛

ويُمكن توضيح مفهوم القيمة الحالية لدفعات بداية المدة وطريقة حسابها من خلال الشكل التالي:



والقيمة الحالية للدفعات كاملة A'_0 تكون إبتداء من آخر دفعة كما يلي:

$$A'_0 = a(1+i)^{-(n-1)} + a(1+i)^{-(n-2)} + \ldots + a(1+i)^{-3} + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-1} + a$$

وبملاحظة الطرف الأيمن من المعادلة نجد أنها تكون متتالية هندسية متزايدة حدها الأول $a(1+i)^{-(n-1)}$ وأساسها $(1+i)$ وعدد حدودها n وبالتالي فإن مجموع المتتالية الهندسية، أي مجموع القيم الحالية للدفعات يكون كما يلي:

$$A'_0 = a(1+i)^{-(n-1)}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}\right] = a\left[\frac{(1+i) - (1+i)^{-(n-1)}}{i}\right] = a\left[\frac{i}{i} + \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right]$$

$$A'_0 = a\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right]$$

الطريقة الثانية: حساب القيمة الحالية لجملة الدفعات:

$$A'_0 = A'_n(1+i)^{-n} \Rightarrow A'_0 = a\left[\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right](1+i)^{-n} \Rightarrow \boxed{A'_0 = a\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right]}$$

ولحساب القيمة الحالية لدفعات بداية المدة نستعين بالجدول المالي رقم 4 الذي يُقدم العلاقة $\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}$ بشرط وجود معدل الفائدة في الجدول المالي، وهنا نكون أمام حالتين:

- حالة وجود معدل الفائدة في الجدول المالي:

مثال:

احسب القيمة الحالية لـ 8 دفعات متساوية قيمة الواحدة تساوي 4429 دج الأولى تُدفع في بداية الفترة بمعدل فائدة 4%.

الحل:

$$a = 4429 \text{ دج}$$

$$i = 4\%$$

$$n = 8 \text{ دفعات}$$

$$A'_0 = a\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right] \Rightarrow A'_0 = 4429\left[1+\frac{1-(1+0.04)^{-(8-1)}}{0.04}\right] = 4429(1+6{,}00205467)$$

$$\boxed{A'_0 = 31012{,}1 \text{ دج}}$$

- **حالة عدم وجود معدل الفائدة في الجدول المالي:** في هذه الحالة يتم حساب القيمة الحالية باستخدام طريقة التناسب كما يلي:

ليكن i هو المعدل غيرالمجدول: نحدد المعدلين المجدولين الذين يحصران المعدل غير المجدول وليكن المعدل الكبير i_1 والمعدل الصغير i_2 ، وتُكتب صيغة التناسب كما يلي:

$$\boxed{\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}=\frac{1-(1+i_2)^{-(n-1)}}{i_2}-\frac{\left(\frac{1-(1+i_2)^{-(n-1)}}{i_2}-\frac{1-(1+i_1)^{-(n-1)}}{i_1}\right)\times(i-i_2)}{(i_1-i_2)}}$$

ثم نقوم بعد ذلك باستخدام المقدار $\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}$ في حساب القيمة الحالية لدفعات بداية المدة.

مثال:

احسب القيمة الحالية لـ 5 دفعات متساوية قيمة الواحدة تساوي 8149دج الأولى تُدفع في بداية الفترة بمعدل فائدة 2,9%.

الحل:

$$a = 8149 \text{ دج}$$

$$i = 2,9\%$$

$$n = 5 \text{ دفعات}$$

نلاحظ أن معدل الفائدة 2,9%غير موجود في الجدول المالي وهو محصور بين $i_1=3\%$ و $i_2=2,75\%$

وبطريقة التناسب:

$$\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{1-(1+i_2)^{-(n-1)}}{i_2} - \frac{\left(\frac{1-(1+i_2)^{-(n-1)}}{i_2} - \frac{1-(1+i_1)^{-(n-1)}}{i_1}\right)\times(i-i_2)}{(i_1-i_2)}$$

$$\frac{1-(1+0.029)^{-(5-1)}}{0,029} = \frac{1-(1+0.0275)^{-(5-1)}}{0.0275} - \frac{\left(\frac{1-(1+0.0275)^{-(5-1)}}{0.0275} - \frac{1-(1+0.03)^{-(5-1)}}{0.03}\right)\times(0.029-0.0275)}{(0.03-0.0275)}$$

$$\frac{1-(1+0.029)^{-(5-1)}}{0.029} = 3.739427865 - \frac{(3.739427865-3.717098403)\times(0.0015)}{(0.0025)} = 3.726030188$$

$$A'_0 = a\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right] \Rightarrow A'_0 = 8149\left[1+\frac{1-(1+0.029)^{-(5-1)}}{0.029}\right] = 8149(1+3.726030188)$$

$$\boxed{A'_0 = 38512,42 \text{ دج}}$$

- إستخدام قانون القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

باستخدام قانون القيمة الحالية لدفعات بداية المدة يُمكن تحديد أي عنصر مجهول مع ضرورة معلومية باقي العناصر

1- تحديد قيمة الدفعة: يُمكن إيجاد قيمة الدفعة كما يلي:

$$A'_0 = a\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right] \Rightarrow \boxed{a = \frac{A'_0}{1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}}}$$

ويُمكن أن نستخرج قيمة المقدار $\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}$ من الجدول المالي رقم 4.

<u>مثال:</u>

تبلغ القيمة الحالية لـ 8 دفعات متساوية الأولى تُدفع في بداية الفترة 57179,59 دج. معدل الفائدة 3,5%.

<u>المطلوب</u>: أوجد قيمة الدفعة؟

<u>الحل:</u>

$$A'_0 = 57179{,}59 \text{ دج}$$

$$i = 3{,}5\%$$

$$n = 8 \text{ دفعات}$$

$$a = \frac{A'_0}{1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}} = \frac{57179{,}59}{1+\frac{1-(1+0{,}035)^{-(8-1)}}{i}} = \frac{57179{,}59}{1+6{,}11454398} \Rightarrow \boxed{a = 8037 \text{ دج}}$$

2- تحديد معدل الفائدة:

إنطلاقا من قانون القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

$$A_0' = a\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right] \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{A_0'}{a} - 1$$

ثم نبحث عن قيمة الطرف الأيمن من المعادلة في الجدول المالي رقم 4 في السطر الذي يقابل n المعلومة، وهنا نكون أمام حالتين:

<u>الحالة الأولى: وجود القيمة في الجدول المالي</u>: معدل الفائدة المبحوث عنه هو المعدل المقابل للقيمة في العمود الذي تقع فيه هذه القيمة.

<u>مثال:</u>

سلسلة دفعات متساوية عددها 7 وقيمة كل واحدة منها 7344 وحدة نقدية، الأولى تُدفع في بداية الفترة، كانت قيمتها الحالية 46157,566 وحدة نقدية.

<u>المطلوب</u>:

أوجد معدل الفائدة المطبق؟

<u>الحل:</u>

$A_0' = 46157,566$ وحدة نقدية

$a = 7344$ وحدة نقدية

$n = 7$ دفعات

$$\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{A_0'}{a} - 1 \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-(7-1)}}{i} = \frac{46157,566}{7344} - 1 = 5,285071623$$

نبحث عن المقدار 5,285071623 في الجدول المالي رقم 4 عند السطر الذي يقابل n=6 ونجد تلك القيمة في العمود الذي يقابل معدل فائدة 3,75% إذا:

$$\boxed{i = 3,75\%}$$

الحالة الثانية: عدم وجود القيمة فى الجدول المالى: إذا بحثنا في الجدول المالي رقم 4 عن القيمة ولم نجدها فإننا في هذه الحالة نجد معدل الفائدة بطريقة التناسب كما يلي:

نحدد القيمتين في الجدول المالي رقم 4 اللتين تقع بينهما القيمة $\frac{A'_0}{a} - 1$ في السطر التي تقع فيه المدة المعلومة، ونرمز للقيمة الكبرى بـ x_1 ومعدل الفائدة المقابل بـ i_2 ، ونرمز للقيمة الصغرى بـ x_2 ومعدل الفائدة المقابل بـ i_1.

ويتم إيجاد معدل الفائدة بالتناسب كما يلي:

$$\boxed{i = i_1 - \frac{\left(\left(\frac{A'_0}{a} - 1\right) - x_2\right)(i_1 - i_2)}{(x_1 - x_2)}}$$

مثال:

سلسلة دفعات سنوية متساوية عددها 9 دفعات وقيمة كل واحدة منها 5200 دج، الدفعة الأولى تُدفع في بداية السنة الأولى، القيمة الحالية للدفعات 39220,59 دج

المطلوب: أوجد معدل الفائدة المركب السنوي المطبق؟

الحل:

$$A'_0 = 39220{,}59 \text{ دج}$$

$$a = 5200 \text{ دج}$$

$$n = 9 \text{ دفعات}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{A'_0}{a} - 1 \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-(9-1)}}{i} = \frac{39220{,}59}{5200} - 1 = 6{,}542421154$$

بالبحث عن المقدار 6.542421154 في الجدول المالي رقم 4 عند السطر الذي يقابل n=8 فإننا لا نجده

وبالتالي يتم إيجاد معدل الفائدة كما يلي:

المقدار6.542421154 محصور بين x_1=6.595886067 ومعدل الفائدة المقابل هو i_2=4.5%

وx_2=6.52903633 ومعدل الفائدة الذي يقابله هو i_1=4.75%، ومنه:

$$i = i_1 - \frac{\left(\left(\frac{A'_0}{a} - 1\right) - x_2\right)(i_1 - i_2)}{(x_1 - x_2)} \Rightarrow i = 0.0475 - \frac{(6{,}542421154 - 6.52903633)(0.0475 - 0.045)}{(6.595886067 - 6.52903633)}$$

$$i = 0.0475 + 0.000500556 = 0.04699944 \approx 0.047$$

$$\boldsymbol{i} = 4.7\%$$

3- تحديد عدد الدفعات :

انطلاقا من قانون القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:

$$A'_0 = a\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right] \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{A'_0}{a} - 1$$

ثم نبحث عن قيمة الطرف الأيمن من المعادلة في الجدول المالي رقم 4 وهنا نكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود القيمة في الجدول المالي: المدة أو عدد الدفعات المبحوث عنها هي المقابلة للقيمة في السطر الذي تقع فيه هذه القيمة.

مثال:

سلسلة دفعات متساوية قيمة كل منها 10057 وحدة نقدية، الأولى تُدفع في بداية الفترة، كانت قيمتها الحالية 56904,02 وحدة نقدية. معدل الفائدة 7.75%.

المطلوب:

أوجد عدد الدفعات؟

الحل:

$A'_0 = 56904{,}02$ وحدة نقدية

$a = 10057$ وحدة نقدية

$i = 7.75\%$

$$\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{A'_0}{a} - 1 \Rightarrow \frac{1-(1+0.0775)^{-(n-1)}}{0.0775} = \frac{56904.02}{10057} - 1 = 4.65815054$$

نبحث عن المقدار 4,65815054 في الجدول المالي رقم 4 عند العمود الذي يقابل معدل فائدة 7.75% ونجد تلك القيمة في السطر الذي يقابل 6 دفعات. ومنه:

$n - 1 = 6 \Rightarrow n = 6 + 1 = 7$ دفعات

الحالة الثانية: عدم وجود القيمة في الجدول المالي: عدم وجود حاصل القسمة تعني أن n هي عدد غير كامل، وهي حالة غير مقبولة لأن n تمثل عدد الدفعات، وعند مصادفة هذه الحالة فإننا نقوم بما يلي:

نبحث في الجدول المالي رقم 4 عن القيمتين اللتين تحصران القيمة $1 - \frac{A'_0}{a}$ في العمود الذي يقابل معدل الفائدة المعلوم ونحدد عدد الدفعات التي تقابل تلك القيمتين. ونرمز لـ n الكبيرة بـ n_1 و n الصغيرة بـ n_2. ومن تم يُمكن الأخذ بأحد الحلين التاليين:

1- إعادة حساب قيمة الدفعة في حالة عدد الدفعات يساوي n_1.

2- إعادة حساب قيمة الدفعة في حالة عدد الدفعات يساوي n_2.

3- تعديل قيمة الدفعة الأخيرة: يتم إعادة حساب القيمة الحالية على أساس عدد الدفعات يساوي n_1 أو n_2 ثم يتم تحديد الفارق بين القيمة الحالية المعطاة والقيمة الحالية المحسوبة على أساس n_1 دفعة (الفرق سالب) أو القيمة الحالية المحسوبة على أساس n_2 دفعة (الفرق موجب)، والفرق يتم طرحه أو إضافته من الدفعة الأخيرة (أي أن الدفعة الأخيرة تصبح غير مساوية للدفعات السابقة).

مثال:

سلسلة دفعات متساوية قيمة كل منها 6400 دج، الأولى تُدفع في بداية الفترة بمعدل فائدة 3,5% كانت قيمتها الحالية 52080 دج.

المطلوب: أوجد عدد الدفعات؟

الحل:

$\grave{A}_0 = 52080$ دج

$a = 6400$ دج

$i = 3,5\%$

$$\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} = \frac{\grave{A}_0}{a} - 1 \Rightarrow \frac{1-(1,035)^{-(n-1)}}{0,035} = \frac{52080}{6400} - 1 = 7,1375$$

بالبحث في الجدول المالي رقم 4 عن حاصل القسمة نجد أن هذا المقدار محصور بين6,873955537 و7,607686509، القيمة الأولى تقابل $n_2-1=8$ والقيمة الثانية تقابل $n_1-1=9$، إذا: $n_2=9$ و $n_1=10$ ،

ويُمكن الأخذ بأحد الحلول التالية:

إعادة حساب حساب قيمة الدفعة على أساس n_1=10

$$a = \frac{A_0^{`}}{1 + \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}} \Rightarrow \frac{52080}{1 + \frac{1-(1,035)^{-(10-1)}}{0,035}} = \frac{52080}{1 + 7,607686509} = \mathbf{6050,41} \text{ دج}$$

إعادة حساب حساب قيمة الدفعة على أساس n_2=9

$$a = \frac{A_0^{`}}{1 + \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}} \Rightarrow \frac{52080}{1 + \frac{1-(1,035)^{-(9-1)}}{0,035}} = \frac{52080}{1 + 6,873955537} = \mathbf{6614,21} \text{ دج}$$

الحل الثالث: تعديل قيمة الدفعة الأخيرة

في حالة $n_1=10$

$$\grave{A_0} = a\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right] = 6400\left[1+\frac{1-(1{,}035)^{-(10-1)}}{0{,}035}\right] = 6400(1+7{,}607686509)$$

$$\grave{A_0} = 55089{,}19 \text{ دج}$$

الفرق هو:

$$52080 - 55089{,}19 = -3009{,}19 \text{ دج}$$

قيمة الدفعة العاشرة والأخيرة:

$$6400 - 3009{,}19 = \mathbf{3390{,}81} \text{ دج}$$

في حالة $n_2=9$

$$\grave{A_0} = a\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right] = 6400\left[1+\frac{1-(1{,}035)^{-(9-1)}}{0{,}035}\right] = 6400(1+6{,}873955537)$$

$$\grave{A_0} = 50393{,}32 \text{ دج}$$

الفرق هو:

$$52080 - 50393{,}32 = 1686{,}68 \text{ دج}$$

قيمة الدفعة التاسعة والأخيرة:

$$6400 + 1686{,}68 = \mathbf{8086{,}68} \text{ دج}$$

الدفعات المتغيرة:

تعريف الدفعات المتغيرة: وهي الدفعات التي تتسم بعدم ثبات قيمتها، وقد تكون هذه الدفعات متغيرة بانتظام وهي التي تخضع في تغييرها لقانون رياضي معين مثل قوانين المتتاليات الحسابية أو المتتاليات الهندسية أو أي نوع أخر من المتسلسلات، وقد تكون هذه الدفعات متزايدة أو متناقصة، كما قد تكون هذه الدفعات متغيرة بدون إنتظام أي الدفعات التي لا تخضع لقانون ثابت في تغيرها وهذا النوع من الدفعات يُعالج بالقوانين الأساسية للفائدة المركبة.

وسوف نتناول فيما سيأتي الدفعات المتغيرة بدون إنتظام.

جملة دفعات متغيرة لنهاية المدة:

لنفترض أن n عدد الدفعات تتكون من دفعات ذات قيم غير متساوية كما يلي:

d عدد دفعات قيمة كل واحدة a_1

e عدد دفعات قيمة كل واحدة a_2

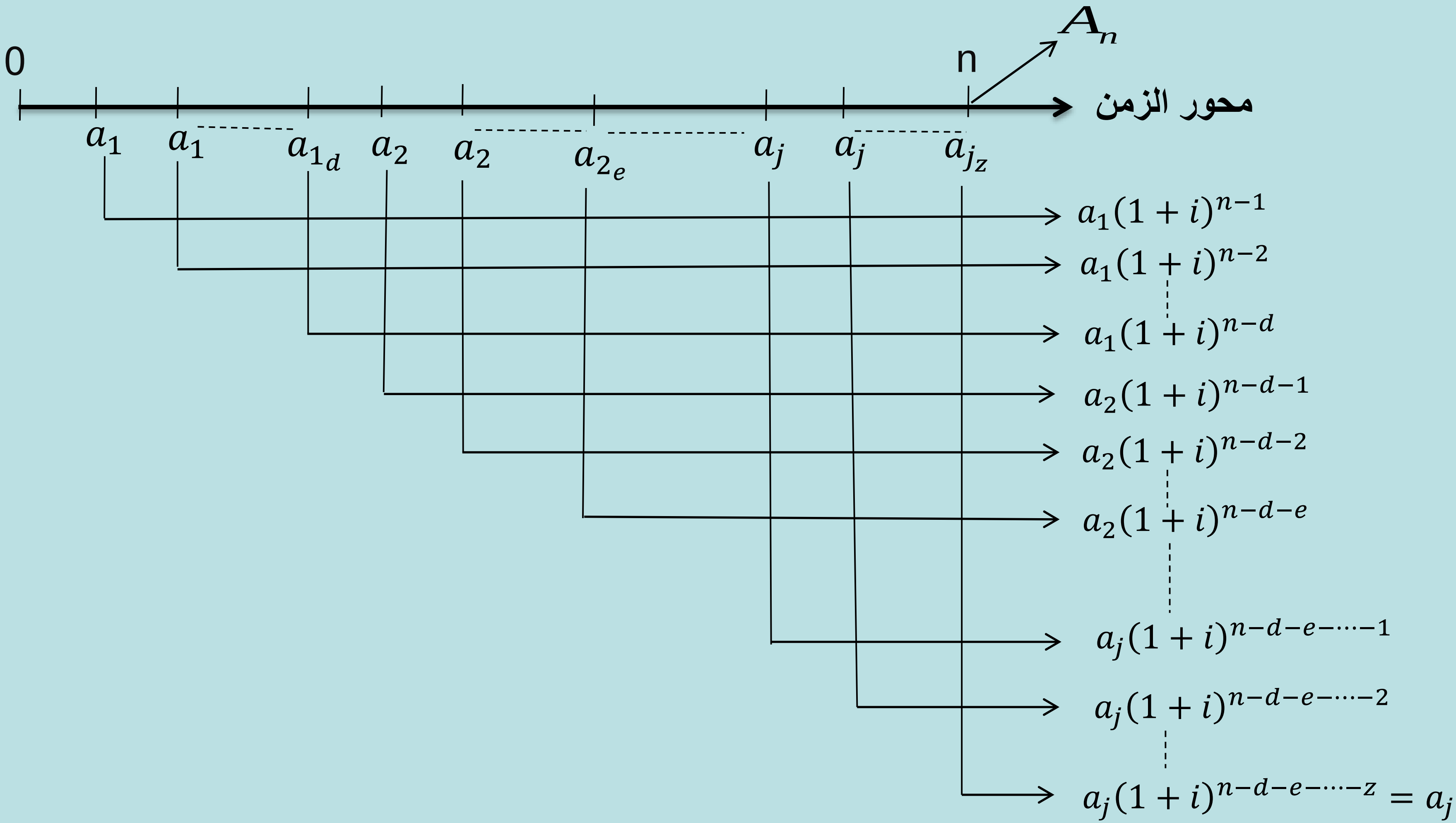
....

....

....

z عدد دفعات قيمة كل واحدة a_j

ويُمكن توضيح مفهوم جملة دفعات متغيرة لنهاية المدة وطريقة حسابها من خلال الشكل التالي:



ويمكن إيجاد قيمة جملة دفعات متغيرة لنهاية المدة من خلال القانون التالي:

$$A_n = a_1\left[\frac{(1+i)^d - 1}{i}\right](1+i)^{n-d} + a_2\left[\frac{(1+i)^e - 1}{i}\right](1+i)^{n-d-e} + \cdots + a_j\left[\frac{(1+i)^Z - 1}{i}\right](1+i)^{n-d-e-z}$$

$$A_n = a_1\left[\frac{(1+i)^d - 1}{i}\right](1+i)^{n-d} + a_2\left[\frac{(1+i)^e - 1}{i}\right](1+i)^{n-d-e} + \cdots + a_j\left[\frac{(1+i)^Z - 1}{i}\right]$$

مثال:

يقوم أحد الأشخاص بتسديد دين عن طريق 9 دفعات سنوية تُدفع كل واحدة في نهاية كل سنة. قيمة كل دفعة من أول دفعتين 3000 وحدة نقدية، قيمة كل دفعة من الدفعات الأربعة الموالية 4000 وحدة نقدية، أما قيمة كل دفعة من الدفعات المتبقية فهي 5000 وحدة نقدية. معدل الفائدة 5%.

المطلوب: أوجد قيمة جملة الدفعات.

الحل:

$$A_n = a_1\left[\frac{(1+i)^d-1}{i}\right](1+i)^{n-d} + a_2\left[\frac{(1+i)^e-1}{i}\right](1+i)^{n-d-e} + a_3\left[\frac{(1+i)^f-1}{i}\right]$$

$$A_9 = 3000\left[\frac{(1{,}05)^2-1}{0{,}05}\right](1{,}05)^{9-2} + 4000\left[\frac{(1{,}05)^4-1}{0{,}05}\right](1{,}05)^{9-2-4} + 5000\left[\frac{(1{,}05)^3-1}{0{,}05}\right]$$

$$A_9 = 3000(2{,}05)(1{,}407100423) + 4000(4{,}310125)(1{,}157625) + 5000(3{,}1525)$$

$\boldsymbol{A_9 = 44374,2}$ وحدة نقدية

القيمة الحالية لدفعات متغيرة لنهاية المدة:

لنفترض أن n عدد الدفعات تتكون من دفعات ذات قيم غير متساوية كما يلي:

d عدد دفعات قيمة كل واحدة a_1

e عدد دفعات قيمة كل واحدة a_2

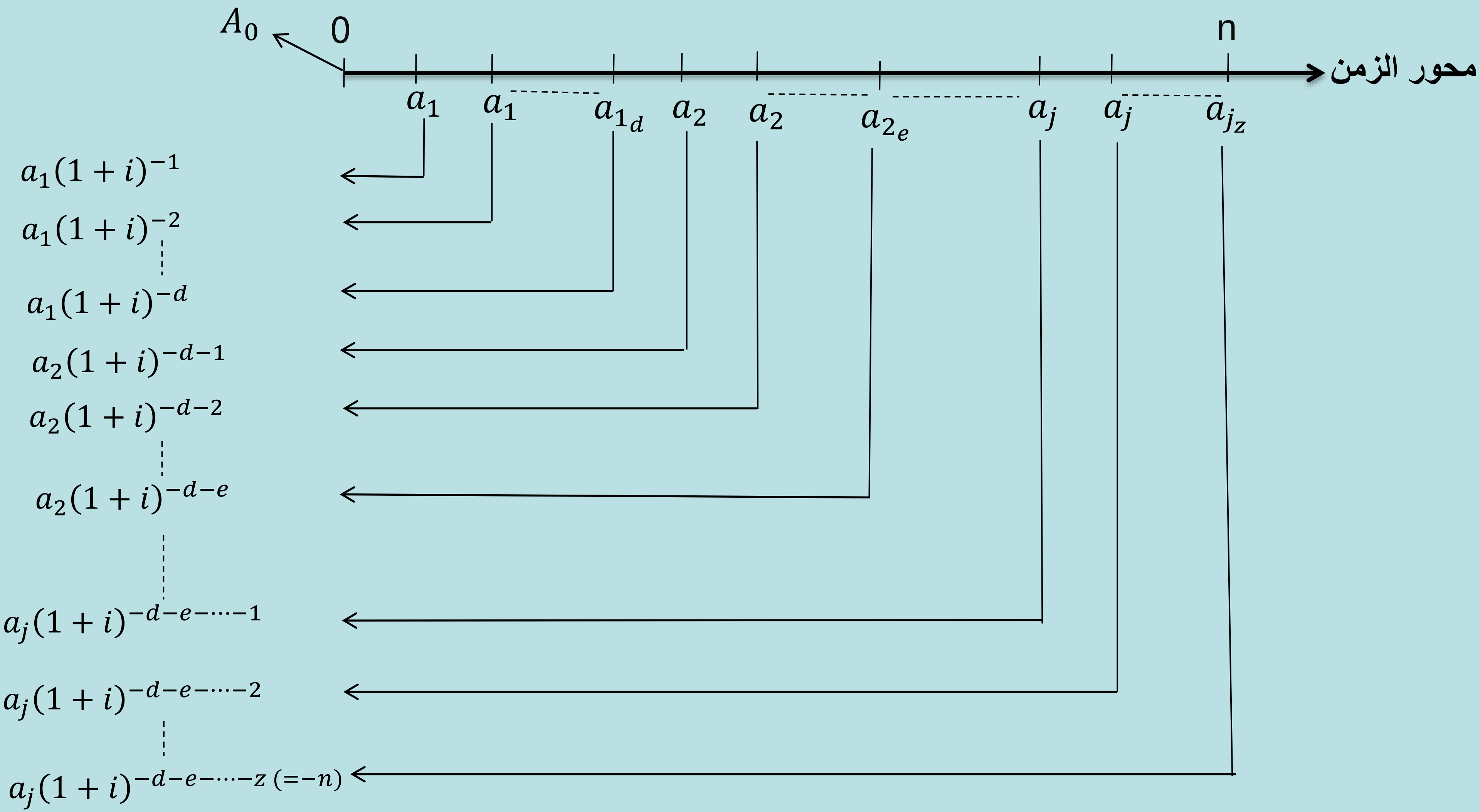
....

....

....

z عدد دفعات قيمة كل واحدة a_j

ويُمكن توضيح مفهوم القيمة الحالية لدفعات متغيرة لنهاية المدة وطريقة حسابها من خلال الشكل التالي:



ويُمكن إيجاد القيمة الحالية لدفعات متغيرة لنهاية المدة من خلال القانون التالي:

$$A_0 = a_1\left[\frac{1-(1+i)^{-d}}{i}\right] + a_2\left[\frac{1-(1+i)^{-e}}{i}\right](1+i)^{-d} + \cdots + a_j\left[\frac{1-(1+i)^{-z}}{i}\right](1+i)^{-d-e-\cdots}$$

مثال:

من المثال السابق أوجد القيمة الحالية للدفعات؟

الحل:

$$A_0 = a_1 \left[\frac{1-(1+i)^{-d}}{i}\right] + a_2 \left[\frac{1-(1+i)^{-e}}{i}\right](1+i)^{-d} + a_3 \left[\frac{1-(1+i)^{-f}}{i}\right](1+i)^{-d-e}$$

$$A_0 = 3000 \left[\frac{1-(1{,}05)^{-2}}{0{,}05}\right] + 4000 \left[\frac{1-(1{,}05)^{-4}}{0{,}05}\right](1{,}05)^{-2} + 5000 \left[\frac{1-(1{,}05)^{-3}}{0{,}05}\right](1{,}05)^{-2-4}$$

$$A_0 = 3000(1{,}859410431) + 4000(3{,}545950504)(0{,}907029478) + 5000(2{,}723248029)(0{,}746215397)$$

$\boldsymbol{A_0 = 28604,01}$ وحدة نقدية

جملة دفعات متغيرة لبداية المدة:

لنفترض أن n عدد الدفعات تتكون من دفعات ذات قيم غير متساوية كما يلي:

d عدد دفعات قيمة كل واحدة a_1

e عدد دفعات قيمة كل واحدة a_2

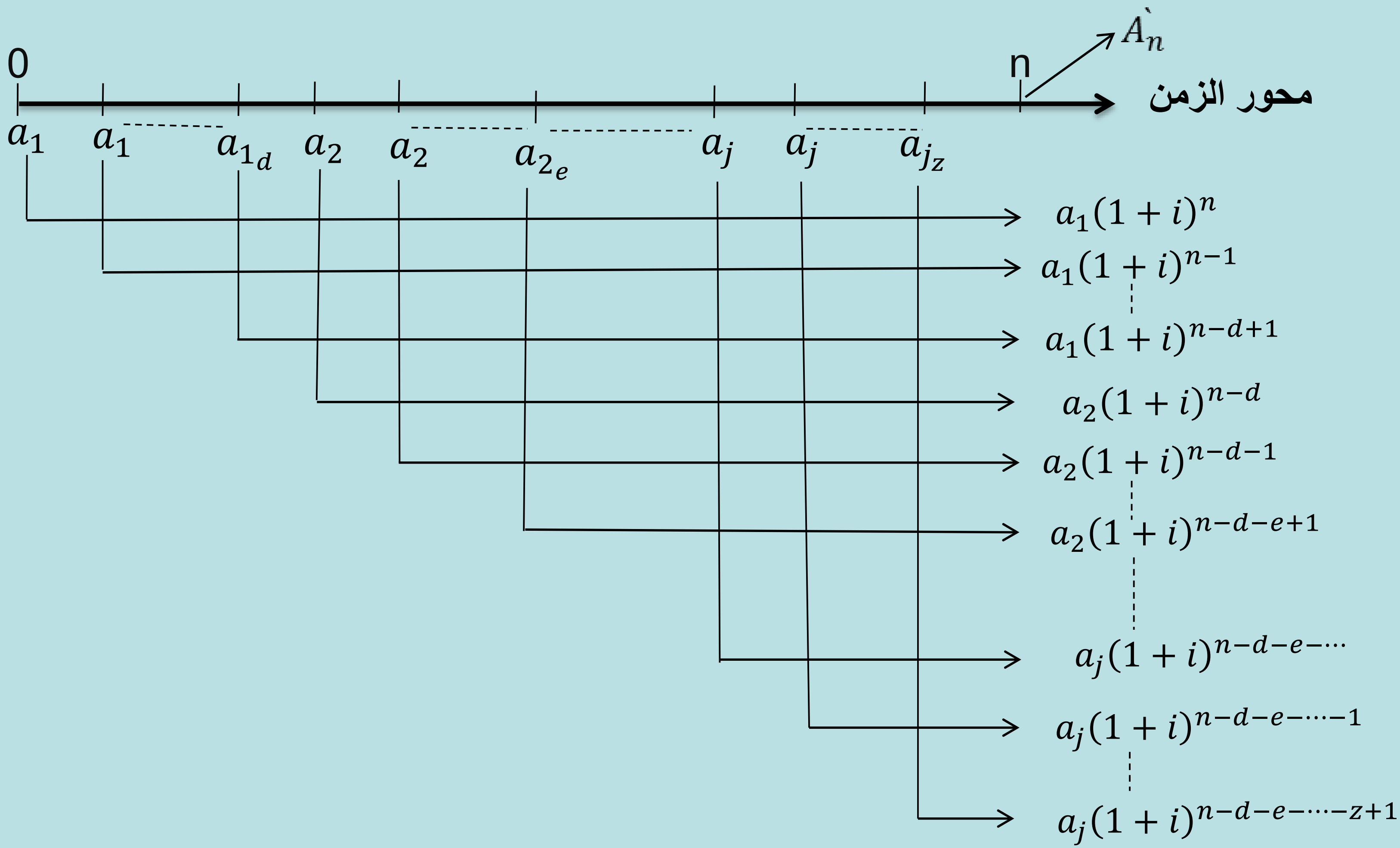
....

....

....

z عدد دفعات قيمة كل واحدة a_j

ويُمكن توضيح مفهوم جملة دفعات متغيرة لبداية المدة وطريقة حسابها من خلال الشكل التالي:



ويُمكن إيجاد قيمة جملة دفعات متغيرة لبداية المدة من خلال القانون التالي:

$$\grave{A}_n = a_1\left[\frac{(1+i)^{d+1}-1}{i}-1\right](1+i)^{n-d} + a_2\left[\frac{(1+i)^{e+1}-1}{i}-1\right](1+i)^{n-d-e} + \cdots + a_j\left[\frac{(1+i)^{z+1}-1}{i}-1\right](1+i)^{n-d-e-z}$$

$$\grave{A}_n = a_1\left[\frac{(1+i)^{d+1}-1}{i}-1\right](1+i)^{n-d} + a_2\left[\frac{(1+i)^{e+1}-1}{i}-1\right](1+i)^{n-d-e} + \cdots + a_j\left[\frac{(1+i)^{z+1}-1}{i}-1\right.$$

مثال:

يقوم أحد الأشخاص بتكوين رأس مال عن طريق 10 دفعات سنوية تُدفع كل واحدة في بداية كل سنة. قيمة كل دفعة من الدفعات الثلاثة الأولى 2500 وحدة نقدية، قيمة كل دفعة من الدفعات الخمسة الموالية 3800 وحدة نقدية، أما قيمة كل دفعة من الدفعتين المتبقيتين فهي 4900 وحدة نقدية. معدل الفائدة 4,5%.

المطلوب: أوجد قيمة جملة الدفعات.

الحل:

$$\grave{A}_{10} = a_1\left[\frac{(1+i)^{d+1}-1}{i}-1\right](1+i)^{n-d} + a_2\left[\frac{(1+i)^{e+1}-1}{i}-1\right](1+i)^{n-d-e} + a_3\left[\frac{(1+i)^{f+1}-1}{i}-1\right]$$

$$A_{10} = 2500\left[\frac{(1{,}045)^{3+1}-1}{0{,}045}-1\right](1{,}045)^{10-3} + 3800\left[\frac{(1{,}045)^{5+1}-1}{0{,}045}-1\right](1{,}045)^{10-3-5} + 4900\left[\frac{(1{,}045)^{2+1}-1}{0{,}045}-1\right]$$

$$A_{10} = 2500(4{,}278191125-1)(1{,}36086183) + 3800(6{,}716891663-1)(1{,}092025) + 4900(3{,}137025-1)$$

$\boldsymbol{A_{10} = 45347,69}$ وحدة نقدية

القيمة الحالية لدفعات متغيرة لبداية المدة:

لنفترض أن n عدد الدفعات تتكون من دفعات ذات قيم غير متساوية كما يلي:

d عدد دفعات قيمة كل واحدة a_1

e عدد دفعات قيمة كل واحدة a_2

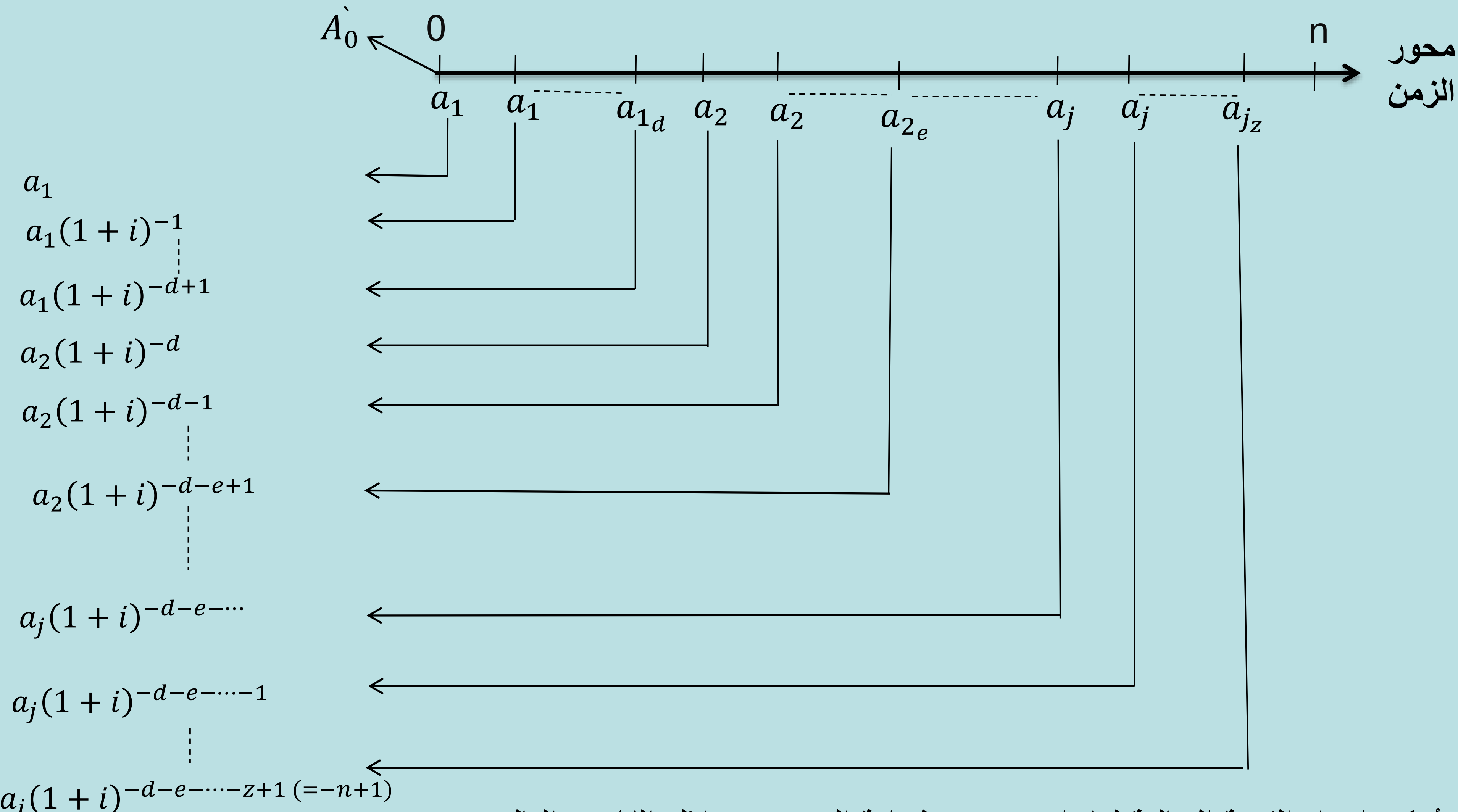
....

....

....

z عدد دفعات قيمة كل واحدة a_j

ويُمكن توضيح مفهوم القيمة الحالية لدفعات متغيرة لبداية المدة وطريقة حسابها من خلال الشكل التالي:



ويُمكن إيجاد القيمة الحالية لدفعات متغيرة لبداية المدة من خلال القانون التالي:

$$A_0^{`} = a_1\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(d-1)}}{i}\right] + a_2\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(e-1)}}{i}\right](1+i)^{-d} + \cdots + a_j\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(z-1)}}{i}\right](1+i)^{-d-e-\cdots}$$

مثال:

من المثال السابق أوجد القيمة الحالية للدفعات؟

الحل:

$$\grave{A_0} = a_1\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(d-1)}}{i}\right] + a_2\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(e-1)}}{i}\right](1+i)^{-d} + a_3\left[1+\frac{1-(1+i)^{-(f-1)}}{i}\right](1+i)^{-d-e}$$

$$\grave{A_0} = 2500\left[1+\frac{1-(1{,}045)^{-(3-1)}}{0{,}045}\right] + 3800\left[1+\frac{1-(1{,}045)^{-(5-1)}}{0{,}045}\right](1{,}045)^{-3} + 4900\left[1+\frac{1-(1{,}045)\ -^{(2-1)}}{0{,}045}\right](1{,}045)^{-3-5}$$

$$A_0 = 2500(1 + 1{,}87266775) + 3800(1+3{,}587525698)(0{,}876296604) + 4900(1+0{,}956937799)(0{,}703185127)$$

$\boldsymbol{A_0 = 29200,63}$ وحدة نقدية