

الدرس 5 : أنشطة حسابية في Q و المدرسة العليا للأساتذة - ميله

الإشياء المسلماتي لـ R رياضيات قاعدية 1

1 الكتابات العشرية والكتابات الكسرية لعدد ناطق :

1.1 الكتابة الدورية لعدد ناطق :

يتميز كل عدد ناطق بكتابة عشرية تضمن دوراً.

أمثلة:

$$\frac{1}{2} = 0,500000 \dots \quad \frac{17}{11} = 1,545454 \dots \quad \frac{23}{7} = 3,28571285712857 \dots$$

1.2 الانتقال من الكتابة العشرية لعدد ناطق إلى الكتابة الكسرية له:

لانتقال من الكتابة العشرية للعدد الناطق a إلى الكتابة الكسرية له نتبع الخطوات التالية:

1. نحسب عدد أرقام الدور الموجودة في الجزء العشري، وليكن مثلاً n .

2. نضرب العدد a في 10^n .

3. نكتب كلتا التعبيرتين بطريقتين مختلفتين ثم نطرح للتخلص من الجزء العشري (نستعمل العبارة $10^n a - a$).

4. باستعمال الكتابتين المختلفتين لـ $10^n a - a$ نشكل معادلة ذات مجهول a .

مثال:

لنكتب العدد $a = 12,373737 \dots$ على الشكل الكسري.

نلاحظ أن عدد أرقام دور الجزء العشري للعدد الناطق a هو 2. إذن نضرب في $10^2 = 100$ فنحصل على:

$$100 \times a = 1237,373737 \dots$$

وبطرح a من الطرفين:

$$100a - a = 1237,373737 \dots - 12,373737 \dots = 1225.$$

ومن هنا:

$$99a = 1225 \Rightarrow a = \frac{1225}{99}.$$

2 الجذور التربيعية لعدد ناطق :

2.1 تعريف :

a عدد حقيقي موجب. نسمي الجذر التربيعي للعدد الحقيقي a العدد الحقيقي الموجب الذي مربعه يساوي a ونرمز له بالرمز $\sqrt{a}$.

2.2 خصائص :

إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين و b غير معدوم فإن:

$$\sqrt{a^2} = a, \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}, (\sqrt{a})^2 = a, \sqrt{a} \geq 0$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3} \quad \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \quad (\sqrt{2})^2 = 2 \quad \sqrt{3^2} = 3$$

مثال :

أوجد الأعداد a , b , c التي تحقق ما يلي:

$$\sqrt{77} + \sqrt{11} + \sqrt{25} = c \quad 1.$$

$$\sqrt{b} + \sqrt{36} = 7 \quad 2.$$

$$\sqrt{7} + \sqrt{a} = 3 \quad 3.$$

3 الإنشاء المسلماتي ل R :

3.1 : مسلمات الجمع

لنكن R مجموعة الأعداد الحقيقية، ونعرف عملية للجمع + على R بحيث:

$$\bullet \text{ (الانغلاق) } \quad \text{إذا كان } x, y \in R \text{ فإن } x + y \in R$$

$$\bullet \text{ (التبديلية) } \quad x + y = y + x$$

$$\bullet \text{ (الجمعية) } \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$\bullet \text{ (العنصر المحايد) } \quad \text{يوجد عدد 0 في R بحيث: } x + 0 = x$$

$$\bullet \text{ (العكس) } \quad \text{لكل } x \in R \text{ يوجد } -x \text{ بحيث: } x + (-x) = 0$$

3.2 : مسلمات الضرب :

نعرف عملية ضرب · على R بحيث:

$$\bullet \text{ (الانغلاق) } \quad \text{إذا كان } x, y \in R \text{ فإن } x \cdot y \in R$$

- (التبديلية) $x \cdot y = y \cdot x$

- (الجمعية) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

- (العنصر المحايد) يوجد عدد $1 \neq 0$ بحيث: $x \cdot 1 = x$

- (العكوس الضربي) لكل $x \neq 0$ يوجد $\frac{1}{x}$ بحيث: $x \cdot \frac{1}{x} = 1$

3.3 مسلمات الانسجام بين الجمع والضرب :

- (التوزيع) $x \cdot (y + z) = xy + xz$

مع هاته المسلمات الثلاثة نسمي R **حقلاً**.

3.4 مسلمات الترتيب :

يوجد ترتيب $\leq$ على R بحيث:

- (الانسجام مع الجمع) إذا كان $x \leq y$ فإن $x + z \leq y + z$ لكل $z \in R$

- (الانسجام مع الضرب) إذا كان $0 \leq x$ و $0 \leq y$ فإن $0 \leq xy$

- (القابلية للمقارنة) لكل $x, y \in R$ ، إما $x \leq y$ أو $y \leq x$

مع اضافة مسلمة الترتيب تصبح R تسمى **حقلاً مرتباً**.

3.5 مسلمة الإكمال

كل مجموعة غير فارغة من الأعداد الحقيقية وكانت محدودة من الأعلى، فهي تمتلك أصغر حدٍّ أعلى في R .
مثال : إذا اعتبرنا المجموعة:

$$A = \{x \in R : x < 3\},$$

فإن العدد 3 هو حدُّ أعلى لها، وهو كذلك أصغر حدٍّ أعلى.