المدرسة العليا للاساتذة ـ ميلة
رياضيات قاعدية 1
الدرس 4 : انشطة حسابية في $\mathbb{Z}$

1) الموافقات :

تعريف

n عدد طبيعي غير معدوم. القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n. نرمز $a\equiv b\ \ n$ أو $a\equiv b\ \ n$ و نقرأ a يوافق b بترديد n.

أمثلة:

$27\equiv 92\ 5$ ، $12\equiv 34\ 11$ ، $24\equiv 3\ 7$ ، $-20\equiv 1\ 7$ ، $-59\equiv -3\ 8$.

ملاحظة: من أجل كل عدد صحيح x ، $x\equiv 0\ 1$.

مبرهنة

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. $a\equiv b\ \ n$ يعني ان $a-b$ مضاعف للعدد n.

البرهان: نفرض أن a و b لهما نفس الباقي r في القسمة الإقليدية على n.

و منه نضع $a=nq+r$ و $b=nq'+r$ حيث q و q' عددين صحيحين و $0\leq r<n$.

و منه
$$a-b=nq+r-nq'-r$$
$$=n\ q-q'$$

بما أن $q-q'$ عدد صحيح فإن $a-b$ مضاعف لـ n.

عكسيا : نفرض $a-b$ مضاعف لـ n. يوجد عدد صحيح k حيث أن $a-b=kn$.

ليكن r باقي قسمة b على n.

لدينا $b=nq+r$. حيث q عدد صحيح و $0\leq r<n$.

و منه $a=b+kn=nq+r+kn=\ q+k\ \ n+r$.

بما أن $q+k$ عدد صحيح و $0\leq r<n$ فإن r هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على n.

ومنه a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n.

مثال: $27\equiv 92\ 5$ ومنه $92-27=65$ اي ان 65 مضاعف لـ 5

خاصية1: n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 $n\geq 2$.

كل عدد صحيح a يوافق، بترديد n، باقي قسمته على n. ونكتب $a\equiv a\ \ n$

البرهان: a عدد صحيح و r باقي قسمته على n.

نعلم أن $a=nq+r$ حيث q عدد صحيح و $0\leq r<n$. و منه $a-r=nq$.

و بالتالي $a-r$ مضاعف لِـ n.

كذلك $a-a=0\times n$ ومنه $a-a$ مضاعف للعدد n

ملاحظة:

نقول أن r هو الباقي إلا إذا كان $0\leq r<n$. فمثلا $16\equiv 6\ 5$ و 6 ليس باقي قسمة 16 على 5 لأن $6\geq 5$. أما الباقي فهو 1 لأن $16\equiv 1\ 5$ و $0\leq 1<5$.

تمرين: من بين الموافقات الآتية أذكر الصحيحة و الخاطئة:

1) $26\equiv 11\ 5$ ؛ 2) $-32\equiv 18\ 10$ ؛ 3) $478\equiv 32\ 5$ ؛ 4) $58\equiv -5\ 7$

5) $63^2\equiv 14\ 5$ ؛ 6) $144\equiv 11\ 19$ ؛ 7) $131^2\equiv 25\ 12$ ؛ 8) $48^3\equiv 36\ 7$

طريقة:

للبرهان على أن $a\equiv b\ \ n$ يمكن البرهان على أن $a-b$ مضاعف لِـ n أو البرهان على أن لِـ a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n.

الحل:

1) $15=26-11$ و $15=3\times 5$. إذن $26\equiv 11\ 5$ صحيحة.

2) $-50=-32-18$ و $-5\ \times 10\ =-50$. إذن $-32\equiv 18\ 10$ صحيحة.

3) $446=478-32$ و $446=89\times 5+1$. إذن $478\equiv 32\ 5$ خاطئةنكتب $478\not\equiv 32\ [5$.

4) $63=58+5$ و $63=9\times 7$. إذن $58\equiv -5\ 7$ صحيحة.

5) $63^2=3969$. باقي قسمة 63^2 على 5 هو 4 إذن وبما أن باقي قسمة العدد 14 على 5 هو كذلك 4 فإن $63^{\ 2}\equiv 14\ 5$ صحيحة.

6) $144=19\times 7+11$ و بما أن العدد 144 يوافق بترديد 19 باقي قسمته على 19 نستنتج أن $144\equiv 11\ 19$ صحيحة.

7) $131^{\ 2}=1430\times 12+1$ و $25=2\times 12+1$ تحصلنا على نفس الباقي في القسمة على 12 إذن $131^{\ 2}\equiv 25\ 12$ صحيحة.

8) $48^{\ 3}=15799\times 7+6$ و $36=5\times 7+1$ لم نحصل على نفس الباقي في القسمة على 7 إذن $48^3\equiv 36\ 7$ خاطئة. و نكتب $48^3\not\equiv 36\ [7$.

تمرين

عين بواقي قسمة العدد 3^n على 7 من اجل $n : 0.1.2.3.4.5.6.7.8$ ماذا تستنتج

تمرين

برر صحة العبارات التالية :

أ. $45\equiv 3[7]$. ب. $152\equiv 2[3]$.

جـ. $29\equiv -1[6]$. د. $137\equiv -3[5]$.

و. $-13\equiv 2[5]$. هـ. $-17\equiv -7[10]$

تمرين

n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

في كل حالة من الحالات التالية ، عين قيم العدد n التي تحقق الموافقة المقترحة .

أ. $46\equiv 0[n]$ ؛

ب. $10\equiv 1[n]$ ؛

جـ. $27\equiv 5[n]$.

خواص:

a ، b ، c و d أعداد صحيحة n عدد طبيعي غير معدوم

1. $a\equiv a\ n$
2. اذا كان $a\equiv b\ n$ فان $b\equiv a\ n$.
3. اذا كان $a\equiv b\ n$ و $b\equiv c\ n$ فان. $a\equiv c\ n$
4. اذا كان $a\equiv b\ n$ و $c\equiv d\ n$ فان $a+c\equiv b+d\ n$
5. اذا كان $a\equiv b\ n$ و $c\equiv d\ n$ فان $ac\equiv bd\ n$
6. p عدد طبيعي غير معدوم اذا كان $a\equiv b\ n$ فان

الخاصية1:

n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 $n\geq 2$.

كل عدد صحيح a يوافق، بترديد n ، باقي قسمته على n. ونكتب $a\equiv a\ n$

البرهان:

a عدد صحيح و r باقي قسمته على n.

نعلم أن $a=nq+r$ حيث q عدد صحيح و $0\leq r<n$. و منه $a-r=nq$.

و بالتالي $a-r$ مضاعف لِ n.

كذلك $a-a=0\times n$ ومنه $a-a$ مضاعف للعدد

الخاصية2:

a ، b عددان صحيحان n عدد طبيعي غير معدوم

اذا كان $a\equiv b\ [n]$ فان $b\equiv a\ [n]$

البرهان:

اذا كان ل a و b نفس الباقي في القسمة الاقليدية على n فان للعدد b و a نفس الباقي في القسمة الاقليدية على n.

الخاصية3 (خاصية التعدي) :

البرهان: a ، b و c أعداد صحيحة حيث ($a\equiv b\ [n]$ و $b\equiv c\ [n]$).

($a\equiv b\ [n]$ و $b\equiv c\ [n]$) يعني ($a-b=kn$ و $b-c=k'n$)(k و k' عددان صحيحان)

و منه و بالجمع نحصل على $a-c=(k+k')n$. بما أن $k+k'$ عدد صحيح فإن $a\equiv c\ [n]$.

الخاصية4 (خاصية التلاؤم مع الجمع):

البرهان: a ، b ، c و d أعداد صحيحة حيث ($a\equiv b\ [n]$ و $c\equiv d\ [n]$).

($a\equiv b\ [n]$ و $c\equiv d\ [n]$) يعني ($a-b=kn$ و $c-d=k'n$)(k و k' عددان صحيحان)

ومنه و بالجمع نحصل على $(a+c)-(b+d)=(k+k')n$. بما أن $k+k'$ عدد صحيح فإن $a+c\equiv b+d\ [n]$.

الخاصية5 (خاصية التلاؤم مع الضرب) :

البرهان: a ، b ، c و d أعداد صحيحة حيث أن($a\equiv b\ [n]$ و $c\equiv d\ [n]$).

($a\equiv b\ [n]$ و $c\equiv d\ [n]$) يعني ($a-b=kn$ و $c-d=k'n$)(k و k' عددان صحيحان)

لدينا

$$\begin{aligned} ac-bd &= ac-ad+ad-bd=a(c-d)+d(a-b) \\ &= ak'n+dkn=(ak'+dk)n \end{aligned}$$

بما أن $ak'+dk$ عدد صحيح فإن $ac\equiv bd\ [n]$.

تمرين1: عين باقي قسمة -5817 على 251.

طريقة: لإيجاد باقي قسمة عدد صحيح سالب a على عدد طبيعي غير معدوم n نبحث عن باقي b قسمة $-a$

على n ثم نضرب الطرفين في -1 ثم نضيف الترديد إلى $-b$.

الحل:

بقسمة العدد 5817 على 251 نحصل على $5817\equiv 44\ [251]$.

نضرب الطرفين في -1 نحصل على $-5817\equiv -44\ [251]$ (الخاصية 7).

نعلم أن $251\equiv 0\ [251]$ و منه $251\equiv 0\ [251]$ (الخاصية 3).

($-5817\equiv -44\ [251]$ و $251\equiv 0\ [251]$) إذن من الخاصية 5 نحصل على

$-5817\equiv 207\ [251]$.

إذن باقي قسمة -5817 على 251 هو 207 لأن $0\leq 207<251$.

2) معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين :

ـ مبرهنة بيزو .

<u>مبرهنة:</u> يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث :

$$au+bv=1$$

ـ مبرهنة غوص .

<u>مبرهنة:</u> a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a يقسم الجداء bc و كان a أوليا مع b ، فإن a يقسم c .

<u>البرهان:</u> يكن a و b عددين صحيحين غير معدومين أوليين فيما بينهما . إذن حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان u و v حيث : $au+bv=1$.

يكن c عددا صحيحا غير معدوم حيث a يقسم الجداء bc.

نضرب طرفي المساواة $au+bv=1$ في c ، نحصل على $cau+cbv=c$.

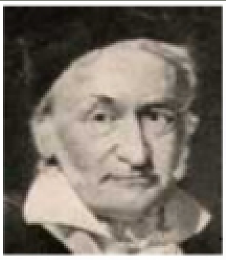
من المعطيات a يقسم الجداء bc و منه a يقسم الجداء bcv و بما أن a يقسم الجداء acu فإن a يقسم $acu+bcv$ أي a يقسم c .

تمرين :

2) تأكد أن الثنائية $(4;2)$ حل للمعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $9x-16y=4$.

3) استنتج في $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $9x-16y=4$.

الحل:



مارك غوص $(1777-1855)$

1) $9x-16y=0$ و منه $9x=16y$.

16 يقسم $16y$ و بالتالي 16 يقسم $9x$ بما أن 16 أولي مع 9 فإن 16 يقسم x

نضع $x=16k$ حيث k عدد صحيح .

بالتعويض في المساواة $9x=16y$ نحصل على $9(16k)=16y$ و منه $y=9k$

الحلول هي الثنائيات من الشكل $(16k;9k)$ حيث k عدد صحيح .

2) $9\times4-16\times2=36-32=4$ و منه $(4;2)$ حل للمعادلة $9x-16y=4$.

3) بطرح 4 من طرفي المعادلة $9x-16y=4$ نحصل على $9x-16y-4=0$.

و نعلم أن $9\times4-16\times2=4$ إذن $9x-16y-(9\times4-16\times2)=0$. و منه $9(x-4)=16(y-2)$.

16 يقسم $16(y-2)$ و بالتالي 16 يقسم $9(x-4)$ بما أن 16 أولي مع 9 فإن 16 يقسم $x-4$

نضع $x-4=16k$ حيث k عدد صحيح أي $x=16k+4$

بالتعويض في المساواة $9(x-4)=16(y-2)$ نحصل على $9(16k)=16(y-2)$ ومنه $y=9k+2$.

الحلول هي الثنائيات من الشكل $(16k+4;9k+2)$ حيث k عدد صحيح .

3) التـشفيــر:

تعريف : التشفير عملية تحويل رسالة مفهومة إلى رسالة غير مفهومة باستعمال قاعدة ومفتاح.

1) تمثيل الحروف بالاعداد $A = 0,\ B = 1,\ \ldots,\ Z = 25$.

2) قاعدة التشفير $y \equiv a\,x + b \pmod{26}$ حيث x رقم الحرف الأصلي، y رقم الحرف المشفّر، وa, b هما المفتاحان.

مثال: نختار $a = 5,\ b = 8$. نريد تشفير الكلمة `MATH`. حيث نعتبر الترقيم $A = 0, B = 1, \ldots, Z = 25$.

خطوة 1 — تحويل الحروف إلى أعداد:

الحرف	A	$\ldots$	Z
الرمز	0	$\ldots$	25

نستخرج الأعداد للحروف المطلوبة: $M \mapsto 12,\quad A \mapsto 0,\quad T \mapsto 19,\qquad H \mapsto 7.$

خطوة 2 — تطبيق صيغة التشفير:

الحرف	**x**	$\mathbf{5x+8}$	$\mathbf{y \equiv (5x+8) \bmod 26}$
M	12	68	16
A	0	8	8
T	19	103	25
H	7	43	17

خطوة 3 — تحويل الأعداد الناتجة إلى حروف:

$$\begin{aligned} y = 16 &\quad\mapsto\quad Q \\ y = 8 &\quad\mapsto\quad I \\ y = 25 &\quad\mapsto\quad Z \\ y = 17 &\quad\mapsto\quad R \end{aligned}$$

نتيجة التشفير : $\text{MATH} \longrightarrow \text{QIZR}.$