المدرسة العليا للأساتذة - ميلة

رياضيات قاعدية

الدرس 2 : المجموعات الاساسية للاعداد

أ) مجموعة الأعداد الحقيقية

تعريف: مجموعة الأعداد الحقيقية، $\mathbb{R}$ ، هي مجموعة فواصل نقط مستقيم مزوّد بمعلم $(O;I)$.

العدد الحقيقي 0 هو فاصلة المبدأ O والعدد الحقيقي 1 هو فاصلة النقطة I.

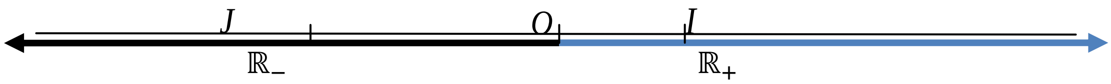
ملاحظات:

1) الأعداد الحقيقية الموجبة هي فواصل نقاط نصف المستقيم $[OI)$.ويرمز لها بالرمز $\mathbb{R}_+$

2) الأعداد الحقيقية السالبة، هي فواصل نقاط نصف المستقيم $[OJ)$. حيث J هي نقطة واقعة على يسار النقطة O ويرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية السالبة بالرمز $\mathbb{R}_-$.

3) الصفر عنصر من $\mathbb{R}_+$ ومن $\mathbb{R}_-$.

4) يرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية ماعدا الصفر بالرمز $\mathbb{R}^*$.



ب) المجموعات الجزئية لمجموعة الأعداد الحقيقية

1. مجموعة الأعداد الطبيعية

0؛ 1؛ 2؛ 3؛ ... أعداد طبيعية. نرمز إلى مجموعة الأعداد الطبيعية بالرمز $\mathbb{N}$.

أمثلة: العدد 3 ينتمي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية. نكتب $3 \in N$ (الرمز $\in$ يُقرأ " ينتمي إلى ").

لدينا كذلك $-2 \notin \mathbb{N}$ (نقرأ -2 لا ينتمي إلى $\mathbb{N}$).

ملاحظات:

1. أصغر عدد طبيعي هو الصفر
2. لا يوجد أكبر عدد طبيعي، أي أن مجموعة الأعداد الطبيعية غير منتهية.

2. مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية

... ؛ -3؛ -2؛ -1؛ 0؛ 1؛ 2؛ 3؛ ... أعداد صحيحة نسبية (سالبة، معدومة أو موجبة).

نرمز إلى مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية بالرمز $\mathbb{Z}$.

أمثلة

العدد -5 ينتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية . نكتب $-5 \in \mathbb{Z}$.

لدينا كذلك $-2.5 \notin \mathbb{Z}$ (نقرأ -2.5 لا ينتمي إلى $\mathbb{Z}$).

نتيجة: كل عدد طبيعي هو عدد صحيح نسبي الطبيعية محتواة في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية ،نكتب $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ونقرأ $\mathbb{N}$ محتواة في $\mathbb{Z}$.

نشاط: أكتب على الشكل $\frac{p}{10^n}$ حيث p عدد صحيح نسبي و n عدد طبيعي كلا من الأعداد التالية: $12,3$ ، $25,587$ ، $0,123$ ، -2587.001 .

3. مجموعة الأعداد العشرية

العدد العشري هو العدد الذي يمكن كتابته على الشكل $\frac{p}{10^n}$ حيث p عدد صحيح نسبي و n عدد طبيعي.

نرمز إلى مجموعة الأعداد العشرية بالرمز $\mathbb{D}$.

مثال: $2,75$ عدد عشري، لأنّ $2,75 = \frac{275}{10^2}$. لكن $\frac{1}{300} \notin \mathbb{D}$.

نتيجة : كل عدد صحيح نسبي هو عدد عشري ونكتب $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

ملاحظة هامة: يمكن كتابة كل عدد عشري على شكل عدد بالفاصلة يتكون من جزء صحيح و جزء عشري منه.

تطبيق: من بين الأعداد التالية عين العشرية منها: $\frac{3}{5}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{9}{10^{158}}$.

4. مجموعة الأعداد الناطقة

تعريف: العدد الناطق هو العدد الذي يمكن كتابته على الشكل $\frac{p}{q}$ حيث p عدد صحيح نسبي و q عدد صحيح نسبي غير معدوم. نرمز إلى مجموعة الأعداد الناطقة بالرمز $\mathbb{Q}$.

مثال: $12,05$ عدد عشري، وهو عدد ناطق أيضا لأنّ $2,75 = \frac{275}{10^2}$.

$\frac{1}{300}$ هو عدد ناطق .

نتيجة : كل عدد عشري هو عدد ناطق ونكتب $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

خاصية: كلّ عدد ناطق يقبل كتابة وحيدة على شكل كسر غير قابل للاختزال $\frac{p}{q}$ ، مع p و q عددين صحيحين نسبيين و $q \neq 0$.

مثال: الشكل غير القابل للاختزال للعدد الناطق $\frac{150}{255}$ هو $\frac{10}{17}$ (لاحظ أنّ $\frac{150}{255} = \frac{15\times10}{15\times17}$).

5. مجموعة الأعداد الغير ناطقة (الصماء)

نسمي عددا أصما كل عدد حقيقي غير ناطق.

العددين π , $\sqrt{2}$ ليسا ناطقين(أصمين) لأنه لا يمكن كتابتهما على الشكل $\frac{p}{q}$ حيث p عدد صحيح نسبي و q عدد صحيح نسبي غير معدوم. إذا فهما عددان أصمان.

مقارنة مجموعات الأعداد

خاصية : تحقق المجموعات العددية الاحتواءات الآتية: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

خاصية: يتميّز كلّ عدد ناطق بكتابة عشرية تتضمن دورا.

مثال: $\frac{19}{11}=1,72727272..$ ؛ $\frac{17}{11}=1,54545454..$ ؛ $\frac{1}{2}=0,500000$

تختصر هذه الكتابات العشرية الدورية كما يلي: $\frac{19}{11}=1,\underline{72}$ ؛ $\frac{17}{11}=1,\underline{54}$ ؛ $\frac{1}{2}=0,5\underline{0}$

نتيجة: الأعداد العشرية دورها معدوم.

المدرسة العليا للأساتذة - ميلة

رياضيات قاعدية

الدرس 3 : انشطة حسابية في N

	المحتوى المعرفي		
	أوجد قواسم كلا من : 1، 2، 9، 16. ومن منها يقبل قاسمين فقط وماذا يسمى هذا النوع من الأعداد ، اعط تعريف بسيط له.		
	1) . إختبار أولية عدد : تعريف: نسمّي عددا أوليا كلّ عدد طبيعي يقبل، بالضبط، قاسمين مختلفين هما: 1 والعدد نفسه. أمثلة: من أجل $n=12$. قواسم العدد 12 هي 1؛ 2؛ 3؛ 4؛ 6؛ 12: العدد 12 يقبل، على الأقل، قاسما يختلف عن 1 وعن 12. فهو ليس أوليا. من أجل $n=37$. قواسم 37 هما 1 و 37 فقط. فالعدد 37 أولي. العدد 1 ليس أوليا، لأنّه يقبل قاسما واحدا فقط والعدد 0 ليس أوليا، لأنّه يقبل عددا غير منته من القواسم. الأعداد الأولية الأصغر من 100 هي: 2؛ 3؛ 5؛ 7؛ 11؛ 13؛ 17؛ 19؛ 23؛ 29؛ 31؛ 37؛ 41؛ 43؛ 47؛ 53؛ 59؛ 61؛ 67؛ 71؛ 73؛ 79؛ 83؛ 89؛ 97. تطبيق هل العدد 197 أوليّ ؟ 2) تحليل عدد طبيعي الى جداء عوامل اولية :		
	نشاط: أكتب الأعداد التالية على شكل جداء عوامل أولية 12،15،20 .		
	تعريف: تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية هو كتابته على شكل جداء أعداد أولية. لتحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية يمكن أن نتبع مايلي: نقسم العدد على أصغر عدد أوليّ يكون قاسما له. نقسم حاصل القسمة على أصغر عدد أوليّ يكون قاسما له. نكرّر عمليات القسمة هذه حتى نصل إلى حاصل قسمة يساوي 1. تطبيق: حلل الأعداد التالية إلى جداء عوامل أولية 30، 45، 245، 100، 157. 3). القاسم المشترك الاكبر :		
	نشاط: 1. بإستعمال خوارزمية إقليدس أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 2268 و 12936. 2. حلل العددين السابقين إلى جداء عوامل أولية. 3. أحسب جداء العوامل الأولية المِشتركة مأخوذة مرة واحدة وبأصغر أس، ماذا يمثل الناتج بالنسبة للعددين		

لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين يمكن أن نتبع مايلي

1. نقوم بتحليل العددين إلى جداء عوامل أولية.
2. نحسب جداء العوامل الأولية المِشتركة مأخودة مرة واحدة وبأصغر أس .

ترميز: نرمز للقاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين بـ: $PGCD$.

4). العددان الأوليان فيما بينهما :

إذا كان القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين هو 1 فالعددان أوليان فيما بينهما.

مثال: أوجد $PGCD(360;49)$ وماذا تستنتج؟.

5). المضاعف المشترك الاصغر :

لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر الغير معدوم لعددين طبيعيين يمكن أن نتبع مايلي:

1. نقوم بتحليل العددين إلى جداء عوامل أولية.
2. نحسب جداء العوامل الأولية المِشتركة و الغير مشتركة مأخودة مرة واحدة و بأكبر أس.

ترميز: نرمز للمضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين بـ: $PPCM$.

(Ppcm := Plus petite commun multiple)

مثال: اوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 256 و 94 .

خاصية: a و b عددان طبيعيان غير معدومين . d قاسم مشترك للعددين a و b. نضع $a=da'$ و $b=db'$ يكون d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا و فقط إذا كان العددان الطبيعيان a' و b' أوليين فيما بينهما .

6). القسمة الاقليدية :

مبرهنة: a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم . توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة حيث $a=bq+r$ و $0\leq r<b$.

خاصية: a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم.
إذا كان a يقسم العددين b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n، a يقسم $mb+nc$

تمرين: ليكن n عددا صحيحا.
يكن العددان الصحيحان $a=5n-2$ و $b=2n+3$.
أثبت أن كل قاسما مشتركا للعددين a و b يقسم العدد 19.

7). أنظمة العد :

تعريف

مبرهنة

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يكتب بطريقة وحيدة على الشكل $a=qx^n+r_{n-1}x^{n-1}+r_{n-2}x^{n-2}+.....+r_2x^2+r_1x+r_0$ حيث $0<q<x$ و $0\leq r_\alpha<x$ مع $\alpha\in\{0;1;2;.....;n-1\}$

البرهان: a عدد طبيعي أكبر من أو يساوي العدد الطبيعي x غير المعدوم و الأكبر تماما من 1 .

ليكن r_0 باقي قسمة a على x . لدينا $a=c_0x+r_0$ حيث c_0 عدد صحيح و $0\leq r_0<x$.

* إذا كان $c_0<x$ المبرهنة محققة.

إذا كان $c_0\geq x$ توجد ثنائية وحيدة $c_1;r_1$ من الأعداد الطبيعية حيث $c_0=c_1x+r_1$ مع $0\leq r_1<x$ و $0<c_1<c_0$.

* إذا كان $c_1<x$ لدينا $a=c_1x^2+r_1x+r_0$ المبرهنة محققة.

إذا كان $c_1\geq x$ توجد ثنائية وحيدة $c_2;r_2$ من الأعداد الطبيعية حيث $c_1=c_2x+r_2$ مع $0\leq r_2<x$ و $0<c_2<c_1$.

* نواصل حتى يصبح حاصل القسمة q على x أصغر تماما من x .

نحصل تباعا على ما يلي :

1 ... $a=c_0x+r_0$ مع $0\leq r_0<x$ و $0<c_0<a$.

2 ... $c_0=c_1x+r_1$ مع $0\leq r_1<x$ و $0<c_1<c_0$.

3 ... $c_1=c_2x+r_2$ مع $0\leq r_2<x$ و $0<c_2<c_1$.

....

$n-1$ ... $c_{n-3}=c_{n-2}x+r_{n-2}$ مع $0\leq r_{n-2}<x$ و $0<c_{n-2}<c_{n-3}$.

n ... $c_{n-2}=c_{n-1}x+r_{n-1}$ مع $0\leq r_{n-1}<x$ و $0<c_{n-1}<c_{n-2}$.

نضرب المساواة 1 ، 2 ، 3 ،، $n-1$ ، n في 1 ، x ، x^2 ، ... ، x^{n-2} ، x^{n-1} على الترتيب و بجمع

النتائج المحصل عليها طرف بطرف نحصل على :

$a=qx^n+r_{n-1}x^{n-1}+r_{n-2}x^{n-2}+.....+r_2x^2+r_1x+r_0$ (مع وضع $c_{n-1}=q$) و منه المبرهنة محققة.

مثال 1 :

العدد 1954 المكتوب في النظام العشري يمكن أن يكتب : $954=1.10^3+9.10^2+5.10^1+4$

$1954=4+5.10^1+9.10^2+1.10^3$ و عليه : $x=10$.

مثال 2 :

اكتب العدد 47 في نظام التعداد الذي أساسه 2:

الحل : $47=23\times2+1$ $\quad 23=11\times2+1$ $\quad 11=5\times2+1$ $\quad 5=2\times2+1$

$2=1\times2+0$ $\quad 1=0\times2+1$ و منه العدد 47 يكتب في النظام الثنائي هكذا $\overline{101111}^2$

و يقرأ واحد صفر واحد .

مثال3 :

اكتب العدد 2007 في نظام التعداد الذي أساسه 8

الحل : $2007 = 250\times8+7$ $\quad 250 = 31\times8+2$ $\quad 31 = 3\times8+7$ $\quad 3 = 0\times8+3$

و عليه العدد 2007 يكتب في النظام الذي أساسه 8

على الشكل : $\overline{3727}^{8}$

تمرين 1: a عدد طبيعي يكتب $\overline{365}$ في النظام ذي الأساس 7 . أكتب a في النظام العشري .

الحل: $a = 3\times7^2+6\times7+5 = 194$ و منه a يكتب 194 في النظام العشري .

تمرين 2: a عدد طبيعي يكتب 2517 في النظام العشري . أكتب a في النظام ذي الأساس 8.

الحل:

$2517 = 314\times8+5$ $\quad 314 = 39\times8+2$ $\quad 39 = 4\times8+7$ $\quad 4 = 8\times0+4$

ومنه $2517 = 4\times8^3+7\times8^2+2\times8+5$

و منه a يكتب $\overline{4725}$ في النظام ذي الأساس 8 .

التعداد ذو الأساس x

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. يعتمد التعداد ذو الأساس x على الاصطلاحين التاليين :

1) إذا كان $a < x$ (a عدد طبيعي) a يمثل برمز وحيد يسمى رقما.

2) إذا كان $a \geq x$ (a عدد طبيعي) من المبرهنة a ينشر بطريقة وحيدة وفق العدد x :

$a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \dots\dots + r_2x^2 + r_1x + r_0$ حيث

$0 < q < x$ و $0 \leq r_\alpha < x$ مع $\alpha \in \{0;1;2;\dots\dots;n-1\}$

يمثل العدد a كما يلي $a = \overline{q\,r_{n-1}\,r_{n-2}\dots r_1\,r_0}$.

الكتابة $a = \overline{q\,r_{n-1}\,r_{n-2}\dots r_1\,r_0}$ هي كتابة العدد a في النظام ذي الأساس x. إذا كان $x = 10$ ، نكتب : $a = q\,r_{n-1}\,r_{n-2}\dots r_1\,r_0$

قاعدة

تمرين 3: a عدد طبيعي يكتب 643 في النظام ذي الأساس 8.

1) أكتب a في النظام ذي الأساس 2 بطريقتين.

- بالمرور عبر النظام العشري .
- مباشرة .

2) أكتب a في النظام ذي الأساس 4 مباشرة .

الحل:

1) • $a = 6\times8^2+4\times8+3 = 419$ و منه a يكتب 419 في النظام العشري .

$419 = 209\times2+1$ $\quad 209 = 104\times2+1$ $\quad 104 = 52\times2+0$ $\quad 52 = 26\times2+0$

$26 = 13\times2+0$ $\quad 13 = 6\times2+1$ $\quad 6 = 3\times2+0$ $\quad 3 = 1\times2+1$ $\quad 1 = 0\times2+1$

$419 = 1\times2^8+1\times2^7+0\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2+1$.

إذن a يكتب $\overline{110100011}$ في النظام ذي الأساس 2.

• $a = 6\times8^2+4\times8+3$

$a = 3\times2\times8^2+2^2\times8+3$.

$a = 3\times2^7+2^5+2+1$.

$a = (2+1)\times2^7+2^5+2+1$

$a = 2^8+2^7+2^5+2+1$

و منه

. $a=1\times2^8+1\times2^7+0\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2+1$

إذن a يكتب $\overline{110100011}$ في النظام ذي الأساس 2.

2) $a=6\times8^2+4\times8+3$

$$a=6\times2^2\times4^2+4\times2\times4+3$$

$$a=6\times4^3+2\times4^2+3$$

$$a=(2+4)4^3+2\times4^2+3$$

$$a=4^4+2\times4^3+2\times4^2+3$$

. $a=1\times4^4+2\times4^3+2\times4^2+0\times4+3$

إذن a يكتب $\overline{12204}$ في النظام ذي الأساس 4.

ملاحظة :

إذا كان N مكتوب في النظام الذي أساسه 10 على الشكل :

$$N=a_0+a_1+10+a_2.10^2+\ldots+a_n10^n$$

فإن N يكتب على الشكل : $N=a_na_{n-1}\ldots a_1a_0$

الانتقال من النظام الذي أساسه x إلى النظام العشري

مثال :

نعتبر العدد N المكتوب في النظام الذي أساسه 3

كما يلي : $N=\overline{2002012}^3$. اكتب N في النظام العشري .

الحل :

$$N=2.3^0+1.3^1+0.3^2+2.3^3+0.3^4+0.3^5+2.3^6$$

$$N=2+3+0+45+0+0+1458$$

$$N=1517$$

الانتقال من النظام الذي أساسه α إلى النظام أساسه β

نعلم أن نظام التعداد الذي أساسه **10** سهل الاستعمال و العمليات الحسابية فيه سهلة و لهذا :

إذا كان N عدد طبيعي مكتوب في نظام تعداد ذو الأساس α و نريد أن نكتب N في نظام تعداد أساسه β فنقوم بما يلي :

- نكتب N في نظام التعداد ذو الأساس **10** (كما سبق)
- نكتب N في نظام التعداد ذو الأساس β

قاعدة

مثال :

عدد N مكتوب في نظام التعداد ذو الأساس **2**

كما يلي : $\overline{11101101}^2$. اكتب N في نظام التعداد ذو الأساس **5**.

الحل :

- نكتب N في نظام التعداد ذو الأساس **10** :

$$N=1.2^0+0.2^1+1.2^2+1.2^3+0.2^4+1.2^5+1.2^6+1.2^7$$

$$N=1+4+8+32+64+128$$

$$N=237$$

- نكتب N في نظام التعداد ذو الأساس **5** :

$$237=47\times5+2 \quad 47=9\times5+2 \quad 9=1\times5+4 \quad 1=0\times5+1$$

و منه N يكتب : $\overline{1422}^5$

ملاحظات :

- النظام العشري هو النظام المستعمل لدى البشر و أساسه عشرة ،
 أما أرقامه فهي : 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 .
- النظام الثنائي هو النظام المستعمل لدى الآلات و أرقامه هي 0، 1 .
- النظام ذو الأساس **8** ، أرقامه : 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7
- النظام ذو الأساس 11 ، أرقامه :
 9، 8، 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7 ، α (حيث : $\alpha = 10$).
- النظام ذو الأساس 12 ، أرقامه :
 9، 8، 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، α ، β حيث : $\alpha = 10$ و $\beta = 11$.

مثال :

اكتب العدد 1954 في نظام التعداد ذو الأساس 12 .

الحل :

$$1954 = 162 \times 12 + 10 \quad 162 = 13 \times 12 + 6 \quad 13 = 1 \times 12 + 1 \quad 1 = 0 \times 12 + 1$$

و عليه العدد 1954 يكتب في نظام التعداد الذي أساسه **12** هكذا :

$\overline{116\alpha}^{12}$ حيث : $\alpha = 10$