الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

مبادئ المنطق وطرق البرهان الرياضي

المحتويات

الفصل الاول

أوليات في المنطق

مقدمة ولمحة تاريخية:

المنطق الرياضي: (Logique Mathematiques) تدل كلمة المنطق على الكلام أو النطق وهي اشتقاق للكلمة اليونانية لوغوس (Logos) والتي تعني العقل أو الفكر. المنطق هو صورة العلم كما عرفه الفيلسوف اليوناني أرسطو في كتبه الدي جمعها العلماء من بعده. يعتبر أرسطو من مؤسسي المنطق الصوري، إد أنه أرسى قواعد الاستنتاج أو منهجية الاستدلال. نعني بدلك طريقة استنباط نتائج معينة معرفة من معطيات موضوعة متل:

كل إنسان فان، سقراط إنسان، إدن سقراط فان.

الرياضيات والمنطق علمــان متداخلان كل منهما يبرهــن على صحة الاخــر لذا كان تطورهما متلازما. لا يمكن تعلم موضوع في الرياضيات غير منطقي، وبالتالي المنطق الرياضي هو فرع من فروع الرياضيات يهتم باستخدام الرموز المنطقية (أدوات الربط) وهي رموز يتم بواسطتها ربط العبارات يبعضها البعض للحصول على عبارات منطقية جديدة ونستخدم في المنطق الرياضي جداول خاصة تعرف باسم جداول الحقيقة (الصحة) وهي تهدف إلى إثبات صحة قضية ما أو عدم صحتما وهي الطريقة الحسابية الأسهل والأضمن لإيجاد قيم الحقيقة للعبارة الرياضية وكلها تعبر عن المنطق الجملي.

مصطلحات رياضية

رمزه	المصطلح		
	انجليزي	فرنسي	عربي
	Logic	Logique	منطق
$p,q,\ldots$	Statement	Proposition ou assertion	قضية
$\bar{p},\bar{q},\ldots$	Negation of statement	Négation d’une assertion	نفي قضية
	Logical connector	Connecteurs logique	أدوات الربط المنطقية
$\wedge$	Conjunction	Conjonction	وصل
$p\wedge q$	p and q	p et q	p و q
$\vee$	Disjunction	Disjonction	فصل
$p\vee q$	p or q	p ou q	p أو q
$\Rightarrow$	Implication	Implication	استلزام
$p\Rightarrow q$	p implies q if p then q	p implique q si p alors q	p يستلزم q إذا p فإن q
$\Leftrightarrow$	Equivalent	Equivalence	تكافؤ
$p\Leftrightarrow q$	p Equivalent q p if q	p equivaut à q p si et seulement si q	p تكافؤ q p إذا q
	Quantifiers	Quantificateurs	مكممات

∀	For any	Quelque soit	مهما يكن
∃	There exists	Il existe au moins	يوجد على الأقل
∃!	There exists a unique	Il existe un seul	يوجد وهو وحيد
	Methods of proofs	Methodes de raisonnements	طرق البرهان
	Direct proof	Raisonnement directe	برهان المباشر
	Proof by contradiction	Raisonnement par l'absurde	برهان بالتناقض
	Proof by contraposition	Raisonnemnt par contraposition	برهان بعكس النقيض
	Proof by induction	Raisonnement par récurence	برهان بالتراجع
	Reasoning on the other hand	Raisonnement par contre exemple	برهان بمثال مضاد

مصطلحات رموز وتعاريف رياضية

رمزه أو تعريفه	المصطلح		
	انجليزي	فرنسي	عربي
A, B,…	Set	Ensemble	مجموعة
x, y,…	Element	Elément	عنصر
∈	Belonging	Appartenance	إنتماء
$x \in A$	x belongs in A	x appartient à A	x ينتمي إلى A
∅	Empty set	Ensemble vide	مجموعة خالية

$\subset$	Inclusion	Inclusion	احتواء
$B\subset A$	B is a part of A	B est une partie de A	B جزء من A
P(A)	Power set	Ensemble des parties	مجموعة أجزاء مجموعة
=	Equality	Egalité	مساواة
A=B	A equal B	A est égale à B	A تساوِي B
$\cap$	Intersection	Intersection	تقاطع
$A\cap B$	Intersection	A inter B	A تقاطع B
$\cup$	Union	Union	اتحاد

مفهوم المنطق الرياضي:

هو كتابة العبارات الرياضية بصورة رمزية ووضع قواعد ثابتة سهلة الاستخدام يساعد في معالجة النصوص الرياضية وفق قواعد معينة ويستهدف من خلالها الوصول إلى نتائج انطلاقا من معطيات معينة، وتتميز لغة المنطق الرياضي باستخدام الحروف الأبجدية المستنبطة من اللغات العربية، اللاتينية كما تستخدم الأعداد والعمليات الرياضية وأيضا نستعين برموز خاصة بلغة المنطق التي تلعب دور الروابط المنطقية.

القضية:

القضية هي الجملة الخبرية التي تحتمل الصدق أو الكذب أي التي يمكن الحكم عليما بالصدق أو الكذب مع العلم أن الجمل الإنشائية ليست جملا خبرية وبالتالي ليست قضية منطقية.

"تكون كل قضية إما صادقة أو خاطئة وليس الاثنين معا"

ملاحظة: يتم استبعاد العبارات النحوية، وكذلك البيانات التي لا معنى لها. عبارات التعجب مثل "الجنة زوجي**!**"، عبارات الاستفهام مثل "كم الساعة؟"، الحتميات مثل "أعطني يدك"، وكذلك العبارات المرجعية الذاتية مثل "أنا أكذب.. ". بالنسبة للأولى، فإن السؤال عما إذا كانت صحيحة أم خطأ لا معنى له، وبالنسبة للأخيرة، فإن السؤال يؤدي إلى مفارقات. هكذا "تتكون هذه الجملة من خمس كلمات". هي عبارة صحيحة، ولكن العبارة المعاكسة "هذه الجملة لا تحتوي على خمس كلمات". هذا صحيح أيضًا.

ملاحظة: تتمثل العبارة البسيطة للقضبة في أنها لا يمكن تقسيمه إلى عدة عبارات.

على سبيل المثال، فإن الافتراض "فلان فيلسوف وعالم رياضيات" يتكون من افتراضين "بطرس فيلسوف"، "بيتر عالم رياضيات" متصل بـ "و".

أمثلة:

1- العبارات الإيجابية مثل "٢ + ٣ = ٥" ، "إنها تمطر" ، "١٦ هي مربع ٣" ، ... لها خاصية إما أن تكون صحيحة أو خاطئة ولكن ليس كلاهما في نفس الوقت. يطلق عليهم المقترحات.

2- قوله تعالى :"**الله الذي لا إله إلاّ هو**" فهذه يمكن اعتبارها قضية لأن التوحيد يقيمه المؤمن وينكره الكافر بما فيه الملحد إذن فهي تحتمل الصدق أو الكذب.

3- قوله تعالى :"**فبأيّ آلاء ربّكُمَا تكذّبَانِ**" فهذه ليست قضية لأنها لا تحتمل الصدق أو الكذب لاحتوائها على سؤال من الله للمخلوقات لما يكذبون بنعم الله عليهم رغم إدراك بعضهم بذلك.

القضية المركبة:

القضية المركب هي قضية مبنية على افتراضات بسيطة مرتبطة بوصلات منطقية.

مثال: القضايا "الجو مشمس و 5=4+1"، "إذا هطل المطر فسأخذ مظلتي" و "بيتر فيلسوف وعالم رياضيات" هي قضايا مركبة.

يمكن تركيب القضايا فيما بينها للحصول على قضايا مركبة باستخدام الرموز التالية:

$$\exists, \forall, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \vee, \wedge$$

كما تستعمل الأقواس (المفتوحة والمغلقة) حيث تلعب دور علامات الوقف ونستخدم كذلك الحروف.

جدول الحقيقة (الصحة):

هو ذلك الجدول الذي يصف الدستور المعين لأجل عملية منطقية، أي من اجل كل توفيق من القيم الحقيقية للقضايا البسيطة التي تتألف منها العبارة المدروسة والمشكلة بواسطة العملية. فإن جدول الحقيقة يعطي قيمة الحقيقة للعبارة المذكورة؛ حيث إذا كانت القضية المراد إنشاء جدول الحقيقة لها بها n قضية أولية فإن جدول الحقيقة يتكون من 2^n ويتعامل جدول الحقيقة بالرمزين (1) للقضية الصحيحة و(0) للقضية الخاطئة.

حساب القضايا:

في حساب القضايا نتعامل مع روابط وقضايا حيث في المنطق الرياضي تنقسم الروابط التي تربط قضيتين أو أكثر إلى :

الروابط الأحادية: وهي التي تضم قضية أولية واحدة ومن أمثلتها:

١- النفي المنطقي ($\overline{\ }$): النفي المنطقي هو رابط أحادي، ونرمز لنفي القضية p بـ $\bar{p}$ والتي تكون صحيحة إذا كانت p خاطئة و العكس بالعكس. ونلخص ذلك في جدول الحقيقة التالي:

$\bar{p}$	P
1	0
0	1

مثلا: p= الطقس جميل، $\bar{p}$= الطقس غير جميل.

روابط ثنائية:

١- **الوصل** $(\wedge)$ **:** وصل العبارتين p و q نرمز له بالرمز $(p \wedge q)$ والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت P صحيحة و q صحيحة ونوضح ذلك في جدول الحقيقة التالي:

$p \wedge q$	Q	P
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

يعبر الوصل على الرابطة اللغوية " و".

مثلا: p= الطقس لطيف

q = الرحلة ممتعة ،

نقول "الطقس لطيف والرحلة ممتعة" ونعبر عنها $p \wedge q$

خواص:

- الوصل تبديلي $(p \wedge q)\Leftrightarrow (q \wedge p)$
- الوصل تجميعي $(p \wedge q)\wedge r \Leftrightarrow p \wedge(q \wedge r)$
- الوصل توزيعي على الفصل $p \wedge(q \vee r)\Leftrightarrow (p \wedge q)\vee(p \wedge r)$

ملاحظة: يشير شكل الرمز ∧ إلى شكل الرمز الذي يشير إلى التقاطع ∩. هذا ليس عن طريق الصدفة: x∈A∩B تعني أن x∈A و x∈B.

٢- **الفصل** $(\vee)$**:**

فصل العبارتين p و q ونرمز له بالرمز $(p\vee q)$ والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت p أو q صحيحة ونوضح ذلك في جدول الحقيقة التالي :

$p \vee q$	Q	P
1	1	1
1	0	1
1	1	0
0	0	0

يعبر الفصل على الرابطة اللغوية " أو".

متلا: p= المثلث قائم

q = المثلث متقايس الساقين ،

نقول " المثلث قائم أو متقايس الساقين" ونعبر عنها $p \vee q$

خواص:

-الفصل تبديلي $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

- الفصل تجميعي $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

-الفصل توزيعي على الوصل $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

ملاحظة: يشير شكل الرمز V إلى شكل الرمز الذي يشير إلى الاتحاد ∪. هذا ليس عن طريق الصدفة: x∈A∪B تعني أن x∈A أو x∈B.

٣- **الاستلزام المنطقي** $(\Rightarrow)$:

استلزام العبارتين p و q نرمز له بالرمز $p \Rightarrow q$ والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت p صحيحة و q خاطئة وتقرا p تستلزم q.عموما إن العبارة السابقة تقرا كما يلي:

- إدا كان p فإن q
- p شرط كاف لـ q
- q شرط لازم لـ p
- p تستلزم q

يدل رمز الاستلزام عموما على القضية الشرطية: " إدا كان ...... فإن......"

متلا: p= تحصل الطالب على معدل يفوق العشرة

q = لم يكن له علامة إقصائية

C= ينتقل إلى السنة الموالية ،

نقول " إدا تحصل الطالب على معدل يفوق العشرة ولم يكن له علامة إقصائية فإنه ينتقل إلى السنة الموالية " ونعبر عنها $p \wedge q \Rightarrow$ C

ملاحظة:

إن العبارة $p \Rightarrow q$ يمكن كتابتها على الشكل التالي $\bar{p} \vee q$: ويمكن تلخيص ذلك في الجدول التالي:

$p \Rightarrow q$	$\bar{p}$	q	P
1	0	1	1
0	0	0	1
1	1	1	0
1	0	0	0

مثلا: p = الطالب مريض

$\bar{p}$= الطالب غير مريض

q = الطالب يغيب عن المحاضرة

$\bar{q}$ = الطالب يحضر المحاضرة

نقول: إدا كان الطالب مريض فإنه يغيب عن المحاضرة و نكتب: $p \Rightarrow q$

لكن لا يمكن أن نقول أنه إدا كان الطالب غير مريض فإنه لم يغيب عن المحاضرة لأنه يمكن أن يكون سليم معافى و يتغيب عن المحاضرة. بمعنى $\bar{p}\ \bar{q} \Rightarrow$ كتابة خاطئة.

بل نقول أن الطالب يحضر المحاضرة يستلزم أن الطالب أكيد غير مريض و نكتب $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$

٤- التكافؤ المنطقي ($\Leftrightarrow$) **:**

تكافؤ العبارتين p و q نرمز له بالرمز $p \Leftrightarrow q$ و يكون صحيحا إذا كانت p و q صحيحتين معا أو خاطئتين معا ونلخص ذلك في جدول الحقيقة التالي:

$p \Leftrightarrow q$	Q	P
1	1	1
0	0	1
0	1	0
1	0	0

ملاحظة:

العبارة $p \Leftrightarrow q$ يمكن التعبير عنها بـ $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ و هذا ما يلخصه الجدول التالي:

$p \Leftrightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow q$	$\bar{q}$	$\bar{p}$	q	P
1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0

يمكن تلخيص نتائج قيم الحقيقة (الصحة) المكونة من قضيتين في الجدول التالي:

$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\bar{p}$	q	P
1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0	0

خواص:

- $\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$
- $\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$
- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}) \wedge (q \Rightarrow p))$
- $\overline{(\exists x \in A, P(x))} \Leftrightarrow (\forall \mathrm{x} \in \mathrm{A}, \overline{p(x)})$
- $\overline{(\forall x \in A, P(x))} \Leftrightarrow (\exists \mathrm{x} \in \mathrm{A}, \overline{p(x)})$
- $\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (\mathrm{p} \wedge \bar{q})$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

أمثلة عن القضايا و الروابط المنطقية :

١- لتكن القضية p التالية $X \in Q: \ (X \geq 1/2)$
لتكن القضية q التالية $X \in Q: (X \leq 1/2)$
عندئذ يكون وصل القضيتين $p \wedge q$ هو: $X \in Q: (X = 1/2)$

٢- لتكن القضية p التالية $X \in Q: \ (X > 1/2)$
لتكن القضية q التالية $X \in Q: (X < 1/2)$
عندئذ يكون فصل القضيتين $p \vee q$ هو: $X \in Q: (X \neq 1/2)$

٣- 3– (3=2) $\Rightarrow$ (2 =1) و عبارة عن استلزام يمكن إرجاعه إلى : $\bar{p}q \vee$
حيث القضية p هي2=1 : والقضية q هي2=3 : وعليه $\bar{p}q \vee$ هي:
(3=2) $\vee$ = (1≠2) ونعلم أن صحة الفصل هي من صحة إحدى القضيتين وبالتالي
يمكن اعتبار الاستلزام (3=2) $\Rightarrow$ (2 =1) صحيح.

الفصل الثانـي

المكمان

مقدمة:

القضية الرياضية عبارة عن بيان صحيح أو خاطئ، ولا يوجد بديل آخر. ليس هذا هو الحال بالنسبة لجميع الافتراضات في اللغة اليومية، على سبيل المثال: "مرحبًا" أو "قل لي، ليست صحيحة ولا خاطئة، إذن هما ليس قضيتان رياضيتان. ولكن "إنها تمطر" أو "أنا في محاضرة المنطق" هي عبارات يمكن أن تكون صحيحة أو خاطئة، وبالتالي فهما قضيتان رياضيتان.

غالبًا ما تكون اللغة الشائعة غامضة: هل العبارة: "يتم إغلاق جميع المتاحف في أيام معينة" تعني "إغلاق جميع المتاحف في أيام معينة" أم أنها تعني "كل متحف مغلق في أيام معينة "، بينما هما مختلفان تمامًا؟

في الرياضيات، لكي تكون قادرًا على القول على وجه اليقين أن خاصية ما صحيحة أو خاطئة، لا يمكن أن يكون هناك غموض. هذا هو السبب في أنه من الضروري اعتماد لغة محددة خاصة بـالمنطق الرياضي. ولهدا نحتاج لاستخدام محددان الكمية (المكممان) للإشارة إلى أي قضايا (بعضها، كل) تكون الخاصية صحيحة.

الثوثولوجي (القانون المنطقي):

تعريف: إن الثوثولوجي (أو القانون المنطقي) هو قضية مركبة نكون صحيحًة مهما كانت قيم الحقيقة للقضايا البسيطة التي تتكون منها.

لإثبات أن الاقتراح المركب هو ثوثولوجي، نقوم ببناء جدول الحقيقة الخاص بنا ونرى أن العمود الأخير يتكون فقط من 1 (صحيح).

مثال: القضايا التالية هي ثوثولوجي

$$\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p$$

$$\overline{(p \wedge \bar{p})}$$

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$$

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$$

الحل:

جدول الحقيقة للقضيتين: (1)و (2)

p	$\bar{p}$	$\bar{\bar{p}}$	$\bar{\bar{p}}\Leftrightarrow p$	$p\wedge\bar{p}$	$\overline{(p\wedge\bar{p})}$
1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1

جدول الحقيقة للقضية: (3)

p	q	$p\wedge q$	$q\wedge p$	$(p\wedge q)\Leftrightarrow(q\wedge p)$
1	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*0*	*1*
0	*1*	*0*	*0*	*1*
0	*0*	*0*	*0*	*1*

جدول الحقيقة للقضية: (4)

p	q	$p\vee q$	$q\vee p$	$(p\vee q)\Leftrightarrow(q\vee p)$
1	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*1*	*1*	*1*
0	*1*	*1*	*1*	*1*
0	*0*	*0*	*0*	*1*

محددات الكم المنطقية:

ليست الروابط المنطقية الوحيدة المهمة في النصوص الرياضية التي درسناها في الدرس الاول: بل يوجد محددان الكمية "∀" و "∃".

لتكن X مجموعة كيفية غير خالية و لتكن E مجموعة من القضايا المنطقية.

نسمي محمول (قصية بدلالة متغير) كل تطبيق

$$P:\quad X \to E$$
$$x \to P(x)$$

تعريف: إدا كانت القضية $P(x)$ صادقة من أجل كل عنصر $x \in X$، نقول إن القضبة

"$\forall x \in X, P(x)$" صادقة، ونقول إنها خاطئة إدا كان $P(x)$ خاطىء من أجل عنصر واحد على الأقل x من X ونسمي الرمز ∀ بالمكمم الكلي.

متال: $0\forall x \in R: x + 1 >$

تعني مهما يكن x من R، لدينا $x + 1 > 0$.

ملاحظة: القضية "$\forall x \in X, P(x)$" نقرؤها كما يلي " مهما يكن x من X حيث القضية $P(x)$ محققة.

تعريف: إذا وجد على الأقل عنصر x من X بحيث $P(x)$ تكون صادقة، نقول أن القضية "$\exists x \in P(x)$" صادقة، ونقول إنها خاطئة إذا كان $P(x)$ خاطىء من أجل كل عنصر x من X ونسمي الرمز $\exists$ بالمكمم الوجودي.

مثال: $\exists x \in R: x + 30 > 30$

تعني يوجد على الأقل x من R، حيث $x + 1 > 0$.

ملاحظة: القضية "$\exists x \in X, P(x)$" نقرؤها كما يلي " يوجد عنصر x من X حيث القضية $P(x)$ محققة.

مثال:

نعتبر القضية: $P(x) = "x \geq 0"$ إذن:

القضية "$\forall x \in R, x \geq 0$" خاطئة.

- القضية "$\exists x \in R, x \geq 0$" خاطئة.

ترتيب محددان الكم:

عند التعامل مع القضايا باستخدام محددان الكم، من المهم توخي الحذر في ترتيب المحددات الكمية.

مثال: العبارة التالية تعني أن كل رقم حقيقي له نقيض:

$$\forall x \in R, \exists y \in R: x + y = 0.$$

هذه القضية صحيحة تمامًا في R (يكفي أن $y = -x$ ؛ لذلك تختلف y وفقًا لـ x).

من ناحية أخرى، القضية

$$\exists y \in R, \forall x \in R: x + y = 0.$$

هو خطأ. هذا يعني في الواقع أنه سيكون هناك عدد حقيقي y نقيضا بالنسبة للجمع: إذا أضيف إلى أي عدد حقيقي x ، فإنه سيعطي دائمًا مجموعًا يساوي صفرًا.

مثل هذا الرقم الحقيقي غير موجود هناك.

ومع ذلك، يمكننا تبديل ترتيب المحددات الكمية إذا كانت متطابقة أو واحدة بجانب الأخرى.

مثال:

العبارة التالية:

$$\forall n \in N, \forall m \in N: n \neq 0 \Rightarrow n + m > m$$

التي معناها

$$\forall m \in N, \forall n \in N: n \neq 0 \Rightarrow n + m > m$$

نفي المحددات الكمية:

إن نفي المُحدِّد الكلي هو المُحدِّد الوجودي، ونفي المُحدِّد الوجودي هو المُحدِّد الكلي. لذلك، من أجل رفض قضية تحتوي على محددات كمية، فإننا نرفض المحددات الكمية وننفي العبارة التالية:

نفي $\exists x \in X, P(x)$ هو $\forall x \in X, \overline{P(x)}$

نفي $\forall x \in X, P(x)$ هو $\exists x \in X, \overline{P(x)}$

مثال: $\forall x \in R, x \geq 0$ خاطئة ونفيها $\exists x \in R, x \geq 0$**.**

مثال:

١- نفي عبارة "*كل التفاح في السلة أخضر*" هو "*هناك تفاحة في السلة ليست خضراء*"
٢- إن نفي "*الكل (...)*" ليس "*لا شيء (...)*" بل بالأحرى "*يوجد واحد على الأقل ليس لدينا (...)*".

ملاحظة: فرضا فقط

القضية "$\forall x \in \emptyset, P(x)$" هي دائما صحيحة (لا يوجد ما يتحقق في المجموعة الخالية). أما القضية "$\exists x \in \emptyset, P(x)$" فهي دائما خاطئة (لا يوجد عنصر في المجموعة)

خصائص المكممين:

نعرف فيما يلي بعض الخواص للمكممين الكلي والوجودي.

لتكن P و Q محمولين معرفين على مجموعة X.

خواص المكمم الكلي:

١- $\forall x \in X, \forall y \in Y, P(x,y) \equiv \forall y \in Y, \forall x \in X, P(x,y)$
(المكمم الطلي تبديلي)
٢- $\forall x \in X, \big(P(x) \wedge Q(x)\big) \equiv \forall x \in X, P(x) \wedge \forall x \in X, Q(x)$
(المكمم الكلي توزيعي على الوصل)
٣- $(\forall x \in X, P(x) \vee \ \forall xX, \in Q(x)) \Rightarrow \forall xX, \in (P(x) \vee Q(x))$
٤- $\forall x \in X, (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall xX, \in P(x) \Rightarrow \forall xX, \in Q(x))$
٥- $\forall x \in X, (P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in X, P(x) \Leftrightarrow \forall x \in X, Q(x))$

خواص المكمم الوجودي:

٦- $\exists x \in X, \exists y \in Y, P(x,y) \equiv \exists y \in Y, \exists x \in X, P(x,y)$
(المكمم الطلي تبديلي)

٧- $\exists x \in X, \big(P(x) \vee Q(x)\big) \equiv \exists x \in X, P(x) \vee \exists x \in X, Q(x)$
(المكمم الكلي توزيعي على الفصل)

٨- $\exists x \in X, (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow [(\exists x \in X, P(x)) \wedge (\exists x \in X, Q(x))]$

٩- $[\exists x \in X, P(x) \Rightarrow \exists x \in X, Q(x)] \Rightarrow [\exists x \in X, \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)]$

الفصل الثالث

أنماط البرهان

البرهان الرياضي:

يعرف البرهان الرياضي على أنه عبارة عن تعليل منطقي لصحة عبارة رياضية أو علاقة رياضية بالاستناد إلى مجموعة من البديهيات. فهو يعرف بأنه عملية تهدف بشكل أساسي أو تبرير صحة عبارة أو علاقة رياضية.

دوره: يتمثل دور البرهان الرياضي في

- التحقق من صحة عبارة ما.
- تعليل سبب صحة عبارة ما.
- توصيل معرفة رياضية.
- اكتشاف أو بناء معرفة رياضية جديدة.
- تنظيم البيانات في نظام بديهي.

١- **طريقة برهان $p \Rightarrow q$:**

نسمي العبارة $p \Rightarrow q$ ، نظرية التأكيد، حيث p هي الفرضيات و q هي الاستنتاجات، مما إثبات النظرية $p \Rightarrow q$ هي اختبار صحة العبارة. فيما يلي طريقة برهانها.

يجب أن نبين أن $p \Rightarrow q$ هي توتولوجي، إدن حسب تعريف الرابط $\Rightarrow$ البرهان يعود إلى أن نبين أن p صحيحة وعليه لابد أن تكون q صحيحة.

٢- **طريقة برهان $p \Leftrightarrow q$:**

العبارة $p \Leftrightarrow q$ تمثل رابط التكافؤ. ومعناها بعبارة أخرى $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

لإثبات $p \Leftrightarrow q$ يكفي أن نبين أن $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$.

أنماط البرهان:

١- **الاستنتاج:** (raisonnement déductif)

تعريف: هو استدلال يعتمد على القاعدة التالية:

عندما تكون p قضية صحيحة، و $p \Rightarrow q$ صحيحة، في هده الحالة فقط يمكننا القول أن q هي قضية حقيقية.

هذا هو المنطق الأساسي الذي يستعمل بشكل واسع وسوف يستخدم هذا المنطق عدة مرات بحيث القضية البسيطة "$p \Rightarrow q$ صحيحة " غير كافية والقضية الأكثر اكتمالا هي " p صحيحة و $p \Rightarrow q$ صحيحة " وبالتالي القضة الثانية فقط تؤكد صحة q.

ملاحظة:

بالإضافة إلى ذلك، فأن المعنى الضمني يمكن أن يكون متعدي، ويأخذ الشكل التالي:

إدا كانت القضية p صحيحة و $p \Rightarrow q \Rightarrow R \Rightarrow \ \dots \ \Rightarrow S \Rightarrow T$ صحيحة، فإن القضية T صحيحة.

٢- <u>**البرهان بالخلف:**</u> (Le raisonnement par l'absurde)

نريد أن نبين أن القضية p صحيحة. نفترض أن نفيها $\bar{p}$ هو الصحيح ونبين أن هذا يؤدي إلى قضية خاطئة. نستنتج أن p صحيحة (لأن q خطأ، فإن الاستلزام $p \Rightarrow q$ لا يمكن أن يكون صحيحًا إلا إذا كانت $\bar{p}$ خطأ أو إذا كانت p صحيحة).

بعبارة أخرى: لكي نبرهن على صحةp ، نفرض أن p خاطئة ونبين أن هذا يؤدي إلى تناقض. أي إدا كانت القضية $\bar{p} \Rightarrow q$ صحيحة والقضية q خاطئة فإن القضية p صحيحة.

<u>مثال:</u>

بين أن أي عدد طبيعي مربعًا، له عدد فردي من القواسم.

ليكن:

p : x هو عدد طبيعي، مربع.

q : x له عدد فردي من القواسم.

بفرض أن p صحيحة و q خطأ. ونبين أن هدا غير محقق.

نفرض أن x هو عدد مربع ويقبل $2k$ من القواسم.

ليكن y عدد بحيث $y = y.y$. نستثني 1، x و y . يبقى عدد فردي من القواسم، ومن بينهم z_1 و z_2 مختلفين حيث $x = z_1.z_2$.

وهدا في الاصل عدد زوجي، ويبقى إدن واحد. ليكن a هداالعدد ويختلف عن 1، x و y . لابد إدن أن يحقق $x = a.a$ وهدا تناقض لأن $a \neq y$.

<u>مثال:</u>

نبين أن $\sqrt{2}$ عدد غير منطقية (irrationnel). أي $\sqrt{2} \notin Q$

نستخدم البرهان بالخلف أن $\sqrt{2} \in Q$. يوجد إدن عددين طبيعيين غير منعدمين a, b حيث: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ او بعبارة أخرة $a^2 = 2b^2$. الأن لتجزئة العدد a^2 إلى عوامل أولية، العدد الأولى 2 يظهر كأس زوجي ($a = 2^{\alpha} \times \dots \Rightarrow a^2 = 2^{2\alpha} \times \dots$)، و بالتالي يظهر كأس فردي في $2b^2$ ($b = 2^{\beta} \times \dots \Rightarrow 2b^2 = 2^{2\beta+1} \times \dots$) . بما أن التجزئة إلى

عوامل اولية للعدد الطبيعي 2 وحيدة، فإن a^2 و $2b^2$ مستحيلة. وعلية الفرضية $\sqrt{2} \in$ Q غير ممكنة وبالتالي $\sqrt{2} \notin Q$

٣- البرهان باستعمال العكس النقيض:(Le raisonnement par contraposition)

نعلم أن القضيتين $(p \Rightarrow q)$ و $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ متكافئان، إدن البرهان على $p \Rightarrow q$ يعود للبرهان على أن $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$.

مثال:

أي عدد طبيعي يمثل مربعًا، له عدد فردي من القواسم.

ليكن:

p : x هو عدد طبيعي، مربع.

q : x له عدد فردي من القواسم.

نبين باستعمال العكس النقيض. لهدا وجب علينا تجميع كل قواسم بأزواج مختلفةy, z حيث $x = y.z$. وبالتالي لا يمكن أن يبقى عدد وحيدa حيث $x = a.a$ وبالتالي x ليس مربعا.

متال:

لتكن k, k' عددين طبيعيين غر منعدمين. بين أن $kk' = 1 \Rightarrow \mathrm{k} = \mathrm{k}' = 1$.

نفرض أن $k \neq 1$ أو $k' \neq 1$. إدن لينا $(k' \geq 1$ و $k \geq 2)$ أو$(k' \geq 2$ و $k \geq 1)$.

وفي كلتا الحالتين لدينا $kk' \geq 2$ وبالخصوص $kk' \neq 1$.

إدن$(kk' \neq 1) \Rightarrow (k \neq 1$ أو $k' \neq 1)$.

بالعكس النقيض $kk' = 1 \Rightarrow \mathrm{k} = \mathrm{k}' = 1$.

٤- البرهان بمثال مضاد:

تعريف: لكي نبرهن على خطأ القضية $\forall x \in E, P(x)$ يكفي أن نجد عنصر x_0 من E حيت $P(x)$ غير صحيح.

٥- البرهان بفصل الحالات:

تعريف: من صحة القضية $(p \Rightarrow q) \wedge (\bar{p} \Rightarrow \bar{q})$ نستنتج صحة القضية q.

٦- البرهان بالتراجع: (raisonnement par récurrence (ou par *induction*))

تعريف: للبرهان على صحة القضية $P(x)$: $(\forall n \geq n_0)$ $(n \in N)$

نتبع الخطوات التالية:

- نثبت صحة القضية $P(n_0)$.
- نفرض صحة القضية $P(k)$: $n_0 \leq k \leq n$.
- نثبت صحة القضية $P(n+1)$.

مثال:

نريد أن نبين أنه $\forall n \in N$:

$$p(n): 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

نستخدم بالبرهان بالتراجع:

- لدينا $p(0)$ محققة.

$$0^3 = \frac{0^2(0+1)^2}{4}$$

- نفرض أن القضية $p(k)$ صحيحة من أجل أحد القيم $k \in N$ بحيث:

$$p(k): 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

- ونبين أن القضية $p(k+1)$ صحيحة.

لدينا بالفرض

$$p(k+1): 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + (k+1)^3$$
$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

إدن

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+\frac{4}{4}(k+1)(k+1)^2$$
$$=\frac{(k+1)^2}{4}(k^2+4(k+1)\quad)=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

إدن

$$0^3+1^3+2^3+\cdots+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2}{4}((k+1)+1)^2$$

وبالتالي $p(k+1)$ صحيحة.