

RAPPELS

Analyse combinatoire :

1. Introduction

La maîtrise des résultats généraux de l'analyse combinatoire est nécessaire à l'étude du calcul des probabilités. C'est pourquoi il est présenté ici quelques techniques classiques permettant de déterminer, sans dénombrement direct, le nombre de cas possibles à l'issue d'une expérience donnée, ou encore le nombre d'élément d'un ensemble donnée.

2. Principe général de comptage (Fundamental rule of counting)

Lorsqu'une situation peut se réaliser de « n » manières et être suivie d'une second situation qui peut se réaliser suivant « p » manière, alors les deux situations peuvent se produire dans l'ordre considéré de « np » manières

Exemple: lors de la désignation du bureau d'une association, il ya 3 candidats au poste de président et 5 candidats au poste de trésorier. Le nombre de bureau possible est alors $3 \times 5 = 15$. Ce principe est généralisable

Exemple

Les étudiants d'une université sont classés suivant le sexe, l'établissement (droit, lettres, sciences, médecine, pharmacie, divers) et le département d'origine (10 département). On dénombre ici :

- 2 cas possible pour le sexe
- 6 cas possible pour l'établissement
- 10 cas possible pour le département
- Il y a donc $2.6.10 = 120$ catégories possibles

Notation factorielle

On définit pour tout nombre entier positif « n » la factorielle de n notée $n!$, par:

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1$$

Propriétés :

$$1! = 1$$

$$0! = 1$$

3. Permutations

3.1. Permutation sans répétition (permutation without replacement)

Définition: on appelle permutation sans répétition de « n » objets discernables toute **disposition (ensemble d'éléments) ordonnée (with regard to ordering)** de ces « n » objets

Formule:

Le nombre de permutation de « n » objets est égale à $n!$ Et on écrit

$$P_n = n!$$

Exemple:

1/ Soient les 3 lettres a,b,c . On a les permutations suivantes

abc,acb,bac,bca,cab,cba

$$P_3 = 3! = 3.2.1 = 6 \text{ permutations}$$

2/ 8 personnes déjeunent autour d'une table

Combien de façon y a-t-il de les placer autour de cette table si celle-ci est en U?

Réponse: $P_8 = 8! = 40320$

Remarque: (permutation circulaire)

Nombre de permutations = $(n-1)!$

Example: Suppose we want to put 10 books on the bookshelf. Of these 10 books, 4 are math, 3 are chemistry, 2 are history, 1 is language. The books of the same subject should be put together. How many different arrangements are possible?

There are $4! \times 3! \times 2! \times 1! \times 1! = 6912$

Exemple:

Si la table est ronde, il suffit de placer une première personne à un endroit précis

$$P_{(8-1)} = 7! = 5040$$

3.2. Permutation avec répétition (with replacement)

Considérons un ensemble de « n » objets décomposable en n_1 objets de type e_1 , n_2 objets de type e_2 ..., n_k objets de type e_k

Le nombre de permutations avec répétition a pour expression

$$Pr_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad \text{Avec } n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

Exemple:

Soit les 4 chiffres 2,2,4,4,7? Combien peut on former de nombres à 5 chiffres avec ceux-ci?

$$Pr_5(2,2,1) = \frac{5!}{2! 2! 1!} = 30$$

Combien de mots différents peut on former par les lettres de mot « MISSISSIPPI »

$$Pr_{11}(1,4,4,2) = \frac{11!}{1! 4! 4! 2!} =$$

Example: How many different letter can be formed using the let-

ters PEPPER? $Pr_6(3,2,1) = \frac{6!}{3! 2! 1!}$

4. Arrangement

4.1. Arrangement sans répétition (without replacement)

Définition: on appelle arrangement sans répétitions de « p » éléments pris parmi « n », toute disposition ordonnée (with regard to ordering) sans répétition de « p » objets pris parmi « n » objets discernable, chaque objet n'intervenant qu'une fois au plus dans un même arrangement.

Formule:

le nombre d'arrangements sans répétition de « p » objets pris parmi n est donnée par:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}, \quad 1 \leq p \leq n$$

Propriétés

$$A_n^p = n A_{n-1}^{p-1}$$

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n! = P_n$$

Exemple: de combien de manière peut-on placer 3 dossiers différents dans 15 casiers vides, à condition d'un dossier par casier?

$$A_{15}^3 = \frac{15!}{12!} = 15.14.13 = 2730$$

4.2. Arrangement avec répétition (with replacement)

Définition: On appelle arrangement avec répétition de « p » éléments pris parmi « n », toute disposition ordonnées, avec répétition éventuelle de « p » éléments parmi les « n »

Formule: Le nombre d'arrangement avec répétition de « p » objets pris parmi « n » objets est donné par:

$$Ar_n^p = n^p, \quad 1 \leq p \leq n$$

Exemple: soit a,b,c

Les arrangements de ces 3 objets pris 2 à 2 avec répétition sont:

aa,bb,cc,ab,ac,bc,ba,ca,cb

$$Ar_n^p = Ar_3^2 = 3^2 = 9$$

5. Combinaisons

5.1. Combinaison sans répétition (without replacement)

Définition: on appelle combinaison sans répétition de « p » éléments pris parmi « n », toute disposition non ordonnée (without regard to ordering) sans répétition de « p » objets extraits parmi « n » objets discernables, chaque objet n'intervenant qu'une fois au plus dans une même combinaison

Formule: Le nombre de combinaisons sans répétition de « p » objets pris parmi « n » objets est:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Propriétés

$$C_n^p \cdot p! = A_n^p$$

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^n = 1, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^{n-1} = n$$

Exemple:

A l'oral d'un examen, un étudiant doit répondre à 5 questions sur 8

1/ Combien a-t-il de choix possibles

2/ Même question si les 3 premières sont imposées

3/ Même question s'il doit répondre au moins à 4 des 5 premiers

Réponses

$$1. C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = 56$$

$$2. C_3^3 \cdot C_5^2 = C_5^2 = 10$$

$$3. C_5^4 \cdot C_3^1 + C_5^5 \cdot C_3^0 = 16$$

Example: From 5 women and 7 men, how many different committees of 2 women and 3 men can be formed? $C_5^2 \cdot C_7^3 = 350$

What if 2 of the men refuse to serve together?

Both A and B are in : $C_5^2 \cdot C_5^1$

A in, B out (B in, A out) : $C_5^2 \times C_5^2$

Neither is in : $C_5^2 \cdot C_5^3$

$$C_5^2 \cdot C_5^3 + C_5^1 \times C_5^2 \times C_5^2 = (C_5^2 \cdot C_5^3) + (C_5^2 \times C_5^2) + (C_5^2 \times C_5^2)$$

Or

$$350 - C_5^2 \cdot C_5^1$$

5.2. Combinaison avec répétition (with replacement)

Définition: on appelle combinaison avec répétition de « p » éléments pris parmi « n », toute disposition non ordonnée (without regard to ordering) avec répétition de « p » objets extraits parmi « n »

Formule: Le nombre de combinaisons avec répétition de « p » objets pris parmi « n » objets est

$$Cr_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Exemple:

Soit les objets a,b et c

Les combinaisons avec répétitions de ces 3 objets pris 2 à 2 sont:

Ab,ac,bc,aa,bb,cc

Réponse

$$Cr_3^2 = C_4^2 = \frac{4!}{2! 2!} = 6$$

Relations et opérations entre les évènements :

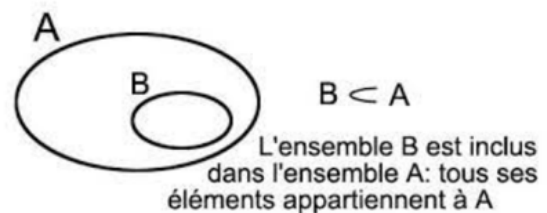
- Événement particuliers

$\emptyset$ = événement impossible: il correspond à tous les cas qui ne peuvent pas se produire à l'issue de l'expérience considéré

-l'inclusion : soit les deux événement A et B. la relation $B \subset A$ signifie que la réalisation de B implique celle de A

Exemple: Dans l'exemple précédent $A = \{2\} \subset B = \{2, 4, 6\}$

Si A est réalisé alors B est réalisé.

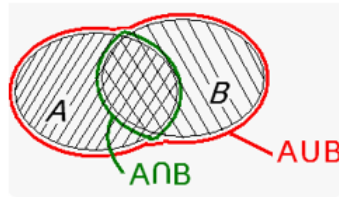


La réunion : soit deux événements A et B. On définit l'événement « A union B » noté $A \cup B$ par:

$$A \cup B \text{ réalisé} \Leftrightarrow A \text{ réalisé ou } B \text{ réalisé}$$
$$\text{si } B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$$

Intersection: soit deux événements A et B. on définit l'événement « A intersection B » noté $A \cap B$ par:

$$A \cap B \text{ réalisé} \Leftrightarrow A \text{ réalisé et } B \text{ réalisé}$$
$$\text{si } B \subset A \Rightarrow A \cap B = B$$



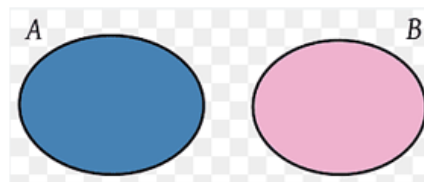
L'incompatibilité

Deux événements A et b sont incompatibles s'ils vérifient $A \cap B = \emptyset$

Ils ne peuvent pas se réaliser simultanément

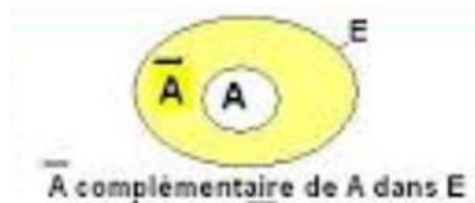
Si on a 3 événements A, B et C, on dit qu'ils s'excluent mutuellement si

$$A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset, C \cap B = \emptyset$$



La complémentarité

On appelle complémentaire de A l'évènement contraire de A noté $\bar{A}$ vérifiant $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$



Propriétés diverses

$$\bar{\bar{A}} = A$$

$$A \cup B = B \cup A \text{ (Cummutative)}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ (Associative)}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ (Distributive)}$$

$$A \cap B = B \cap A \text{ (Cummutative)}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \text{ (Associative)}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ (Distributive)}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

notations	vocabulaire ensembliste	vocabulaire probabiliste
Ω	ensemble plein	événement certain
$\emptyset$	ensemble vide	événement impossible
ω	élément de Ω	événement élémentaire
A	sous-ensemble de Ω	événement
$\omega \in A$	ω appartient à A	ω réalise A
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
A^c ou $\bar{A}$	complémentaire de A	événement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B disjoints	A et B incompatibles

3.2. Conséquences et propriétés

Si $\emptyset$ désigne l'ensemble vide ou l'événement impossible on a :

$$P(\emptyset) = 0$$

Si $\bar{A}$ est l'événement complémentaire de A alors

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Soit A et B deux événement quelconques. Alors

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \text{ et } P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A})$$

Pour deux événements quelconques tels que $A \subset B$ on a

$$P(A) \leq P(B)$$

3.3. le théorème des probabilités totales

3.3.1. Enoncé et vérification

Soit A et B deux événements quelconques de E. Alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemple: Dans le jet du dé à 6 faces équilibrées, considérons les événements:

A : « avoir un nombre pair » = {2, 4, 6}

B: « avoir un multiple de 3 » = {3, 6} et $A \cap B = \{6\}$

$$P(A) = \frac{3}{6}, P(B) = \frac{2}{6}, P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{6}$$