Abdelhafid Boussouf University - Mila
Faculty of Science and Technology
Common Core ST Department
Module: Analysis 1

Academic Year: 2025/2026
1st Year Common Core ST
And 1st Year Engineering
Semester I

Analysis I: Tutorial Exercise Sheet 2

Exercise 01:

For each of the following sequences, give the first five terms:

من أجل كل متتالية من المتتاليات الآتية، أعطي الحدود الخمسة الأولى:

$(a)\left\{\dfrac{2n-1}{3n+2}\right\}$ $(b)\left\{\dfrac{1-(-1)^n}{n^3}\right\}$ $(c)\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\right\}$ $(d)\left\{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right\}$

Exercise 02:

The general term of a sequence is $u_n = \frac{3n-1}{4n+5}$ where. (1) Give the terms of this sequence in decimal form where, $n=1$, $n=5$, $n=10$, $n=100$, $n=1000$ and $n=100000$. Make a guess of $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. (2) Using the definition of limit to verify the guess in the preceding question.

الحد العام لمتتالية هو $u_n = \frac{3n-1}{4n+5}$. (1) أعطي القيمة العددية للحدود بالكتابة العشرية لما $n=1$ ، $n=5$ ، $n=10$ ، $n=100$ ، $n=1000$ و $n=100000$. خمن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. (2) استعمل تعريف النهاية للتأكد من تخمين النهاية في السؤال السابق.

Exercise 03:

Using the definition of a sequence, show that: (باستعمال تعريف نهاية متتالية، برهن أن:)

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n-1}{2n+3} = \dfrac{3}{2}$ (2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n} = 0$ (3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\ln(1+n)}{\ln n} = 2$

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ (5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-5n^2-3}{4n} = -\infty$ (6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\ln n) = +\infty$

Exercise 04:

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is an increasing sequence; (v_n) is the sequence defined for all $n \in \mathbb{N}^*$ by $v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$. Demonstrate that the sequence (v_n).

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متزايدة؛ (v_n) معرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ بـ $v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$. برهن أن المتتالية (v_n) متزايدة.

Exercise 05:

1. Prove that if $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ exists, it is unique. (برهن أنه إذا كانت النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ موجودة فإنها وحيدة)
2. Prove that a convergent sequence is bounded. (برهن أن أي متتالية متقاربة تكون محدودة)
3. If $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$ and $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = B$, prove that $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n+v_n) = A+B$.

إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$ و $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = B$ ، برهن أن $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n+v_n) = A+B$.

4. If $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$ and $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = B$, prove that $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n \cdot v_n) = A \cdot B$.

إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$ و $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = B \neq 0$ ، برهن أن $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n \cdot v_n) = A \cdot B$.

5. If $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$ and $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = B \neq 0$, prove that $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{B}$ and $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{A}{B}$.

إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$ و $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = B \neq 0$ ، برهن أن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{B}$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{A}{B}$.

Exercise 06:

Using theorems on limits, find each of the following (باستعمال مبرهنات النهايات، أوجد كلا من مايلي:)

$(a)\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2-5n}{5n^2+2n-6}$ $\quad (b)\ \lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ $\quad (c)\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n}$

$(d)\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(2n^3-5)}{3n^3+2n^2+1}$ $\quad (e)\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{2n}-e^n+1}{2e^n+3}$ $\quad (f)\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^a e^{-bn}$

Exercise 07:

1. Using the principle of bounding a sequence, demonstrate that the sequence $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges to a limit l, determining it in each case:

باستعمال مبدأ حصر متتالية (مبرهنة المتتاليات الثلاث) ، بين أن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب نحو نهاية l ، عينها في كل حالة من الحالات التالية:

$(a)\ U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^5+k}$ $\quad (b)\ U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^3+k}}$ $\quad (c)\ U_n = \dfrac{[n^{\frac{1}{3}}]}{n}$, where $n \in \mathbb{N}^*$ and $[.]$ denots the floor function

2. Let $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2+|\cos k|\sqrt{k}}$, demonstrate that $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

ليكن $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2+|\cos k|\sqrt{k}}$ ، برهن أن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

Exercise 08:

Consider the sequence $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defined by: $U_0 = 0,\ \ U_{n+1} = \sqrt{U_n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ $U_0 = 0,\ \ U_{n+1} = \sqrt{U_n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Show that $0 \leq U_n < 2$ for all $n \in \mathbb{N}$. (بين أن $0 \leq U_n < 2$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$)

2. Deduce the monotonicity of $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (استنتج رتابة $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$)

3. Consider the sequence $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defined by $V_n = 2 - U_n$ for all $n \in \mathbb{N}$.

نعتبر المتتالية $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بـ $V_n = 2 - U_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Determine the sign of $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (عين إشارة $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$)

   (b) Prove that, for every natural number n, $\frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{1}{2}$. (برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $\frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{1}{2}$)

(c) Using a proof by induction, demonstrate that $V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ for all $n \in \mathbb{N}^*$.
باستعمال البرهان بالتراجع، بين أن $V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) Deduce the limit of the sequence $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, and then the limit of $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
استنتج نهاية المتتالية $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثم نهاية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercise 09:

Consider the sequence $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, defined by:(نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، معرفة بـ)

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n e^{-U_n}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Show that $U_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$. (بين أن)
2. Deduce the monotonicity of $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (استنتج رتابة $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$)
3. Deduce that $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is convergent, then calculate its limit. (استنتج أن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة، ثم أحسب نهايتها)
4. Let $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$, demonstrate that $U_{n+1} = e^{-S_n}$ for all $n \in \mathbb{N}$.
4. ليكن $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ ، برهن أن $U_{n+1} = e^{-S_n}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.
5. Conclude that as n approaches infinity, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
5. استخلص أنه لما n تقترب من اللانهاية، $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Exercise 10:

Consider the sequence $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defined by: (نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بـ)

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{7U_n+4}{3U_n+3}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Show that $0 \leq U_n \leq 2$ for all $n \in \mathbb{N}$. (بين أن $0 \leq U_n \leq 2$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$)
2. Study the monotonicity of (U_n) for $n \in \mathbb{N}$. (أدرس رتابة (U_n) من أجل $n \in \mathbb{N}$)
3. Deduce that (U_n) is convergent and calculate its limit. (استنتج أن (U_n) متقاربة وأحسب نهايتها.)
4. Let $E = \{U_n / n \in \mathbb{N}\}$; determine $\sup E$ and $\inf E$. (لتكن $E = \{U_n / n \in \mathbb{N}\}$ ؛ عين $\sup E$ و $\inf E$)

Exercise 11:

Two real sequences $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ and $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are defined as follows:
المتتاليتان حقيقيتان $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ، معرفتان كمايلي:

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n+2V_n}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} V_1 = 12 \\ V_{n+1} = \frac{U_n+3V_n}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Let $W_n = V_n - U_n$ for all $n \in \mathbb{N}^*$. Express the sequence $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ in terms of n and then calculate its limit.

   .1 لتكن $W_n = V_n - U_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$. عبر عن المتتالية $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ بدلالة $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Show that the sequences $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ and $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are adjacent.

   .2 بين أن المتتاليتان $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متجاورتان.

Exercise 12:

Using the Cauchy criterion, demonstrate that the sequence $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ is convergent and that the sequence $(V_n)_{n\in\mathbb{N},n\geq 2}$ is divergent.

باستعمال معيار كوشي، بين أن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة و أن المتتالية $(V_n)_{n\in\mathbb{N},n\geq 2}$ متباعدة.

1. $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k)}{2^k}$, for all $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $V_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln(k)}$, for all $n \geq 2$.

Exercise 13: $\sqrt{2}$ and Sequence Convergence

1. Prove that if $\lim_{n\to\infty} U_{2n} = L$ and $\lim_{n\to\infty} U_{2n+1} = L$, then (U_n) converges to L.

   برهن أنه إذا كانت $\lim_{n\to\infty} U_{2n} = L$ و $\lim_{n\to\infty} U_{2n+1} = L$ ، فإن (U_n) تتقارب نحو L .

2. Given $U_1 = 1$ and $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+U_n}$, compute the first eight terms of (U_n). Then use part (1) to show that $\lim_{n\to\infty} U_n = \sqrt{2}$. This gives the continued fraction expansion $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}$.

   تعطى $U_1 = 1$ و $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+U_n}$, احسب القيم الثماني الأولى للمتتالية (U_n) . ثم استخدِم الجزء (1) لإثبات أن $\lim_{n\to\infty} U_n = \sqrt{2}$. هذا يعطينا التمدِيد بِصِيغة الكسر المستمر: $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}$.

Exercise 14: Fish Population Dynamics

The fish population p_n is modeled by:(يمكن نمذجة أعداد الأسماك بـ)

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n},$$

where $a, b > 0$ and $p_0 > 0$.

1. Show that if (p_n) converges, then its limit is either 0 or $b - a$.

   بين أنه إذا كانت (p_n) متقاربة، فإن نهايتها إما 0 أو $b - a$.

2. Show that $p_{n+1} < \frac{b}{a}p_n$. (بين أن $p_{n+1} < \frac{b}{a}p_n$.)

3. Use part (2) to show that if $a > b$, then $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

   استعمل الجزء (2) لتبيان أنه إذا كان $a > b$ ، فإن $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

4. Assume $a < b$. Show that if $0 < p_0 < b - a$, then $\{p_n\}$ is increasing and $0 < p_n < b - a$. Show also that if $p_0 > b - a$, then $\{p_n\}$ is decreasing and $p_n > b - a$. Deduce that $\lim_{n\to\infty} p_n = b - a$.

   نفترض أن $a < b$. بين أنه إذا كان $0 < p_0 < b - a$ ، فإن $\{p_n\}$ متزايدة و $0 < p_n < b - a$. بين أيضا أنه إذا كان $p_0 > b - a$ ، فإن $\{p_n\}$ متناقصة و $p_n > b - a$. استنتج أن $\lim_{n\to\infty} p_n = b - a$.