

CENTRE UNIVERSITAIRE ABDELHAFID BOUSSOUF –MILA

01 ANNEE MASTER GENIE CIVIL-STRUCTURE

MÉCANIQUE DES STRUCTURES

LECHEHEB. M

CHAPITRE 03:

MÉTHODE DES FORCES

INTRODUCTION

Nous avons vu précédemment qu'un système est hyperstatique si le nombre d'inconnues de liaison est supérieur au nombre d'équations issues de la statique. Cette différence est appelée le degré d'hyperstaticité du système.

Pour étudier et analyser une structure de degré d'hyperstaticité d , il est nécessaire d'établir équations supplémentaires (dites équations de compatibilités). Les méthodes consistent à choisir un système de base à partir du quel on détermine le système isostatique (SI) le plus simple (Figure 3.1).

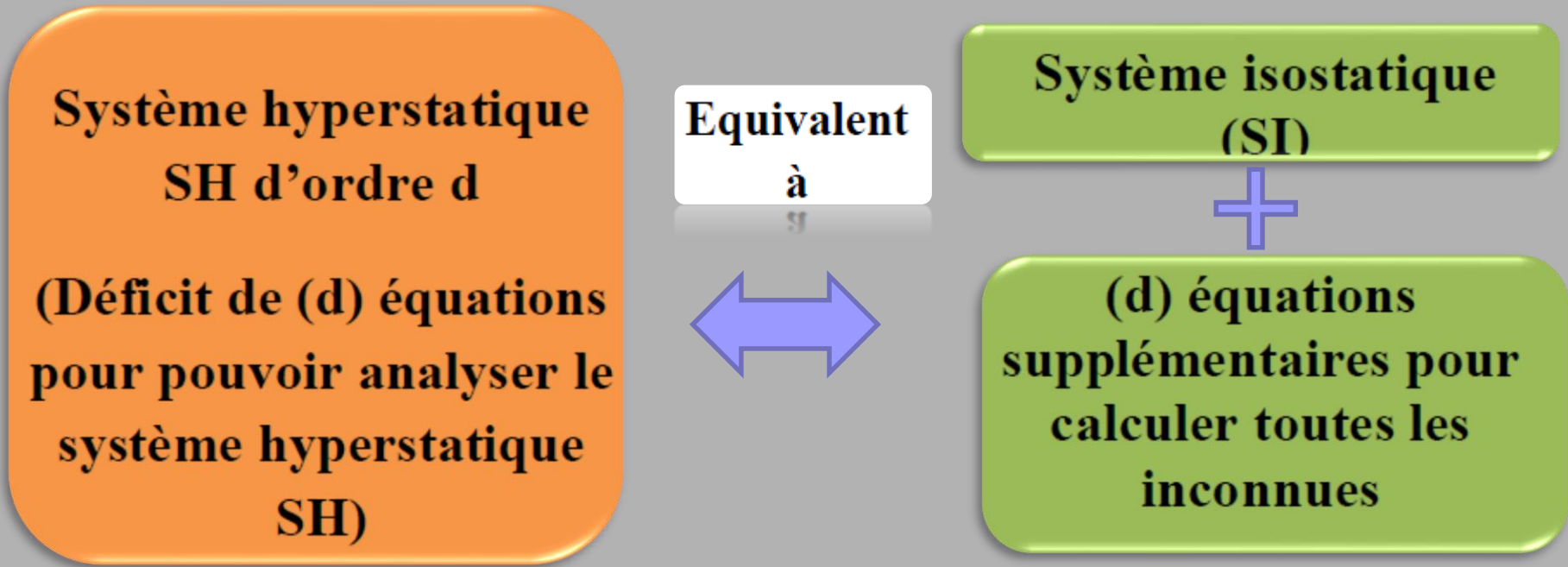


Figure 3.1: Calcul des systèmes hyperstatiques

En raison de l'interdépendance entre les efforts et les déplacements, il en résulte deux manières d'aborder le calcul des structures hyperstatiques, c'est-à-dire :

- soit en s'intéressant aux efforts (dans les liaisons surabondantes) (méthode des forces).
- soit en s'intéressant aux déplacements (méthode des déplacements)

3.1 LIAISONS SURABONDANTES

On appelle liaisons surabondantes, les liaisons qu'il faudrait supprimer à un système hyperstatique pour obtenir une structure isostatique (géométriquement stable, qui ne soit pas libre). Leur nombre représente le *degré d'hyperstaticité* du système. On peut classer les liaisons surabondantes en deux groupes : les liaisons surabondantes extérieures et les liaisons surabondantes intérieures. Les liaisons surabondantes extérieures sont celles qui se trouvent dans les appuis (Figure 3.2a).

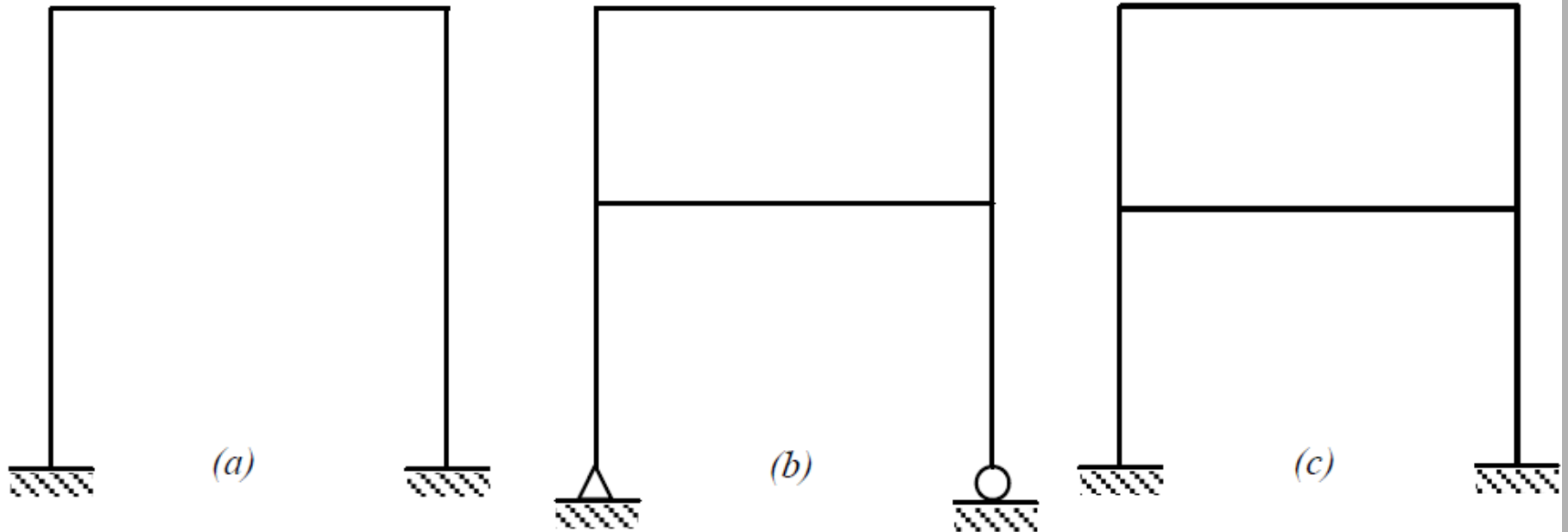
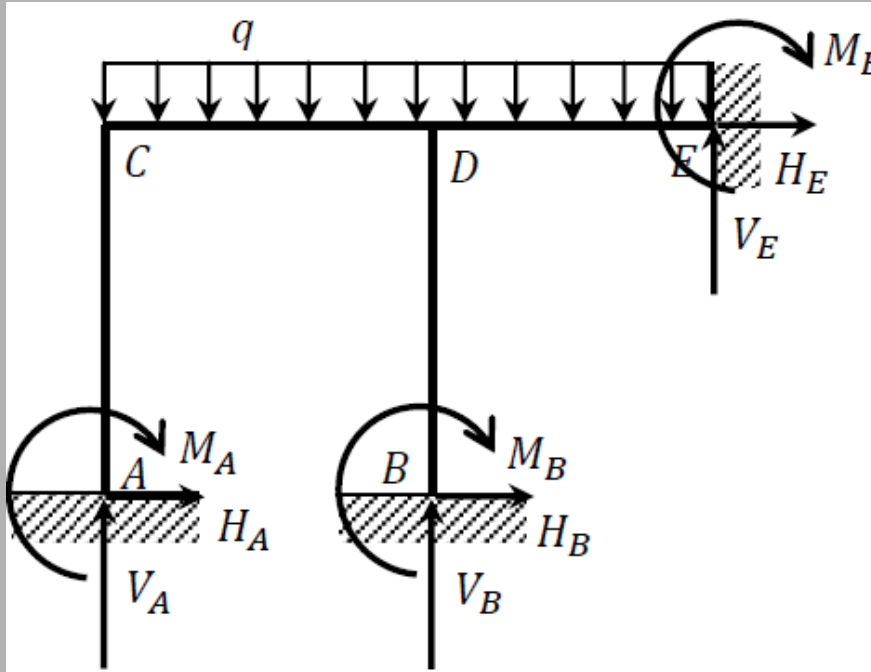


Figure 3.2

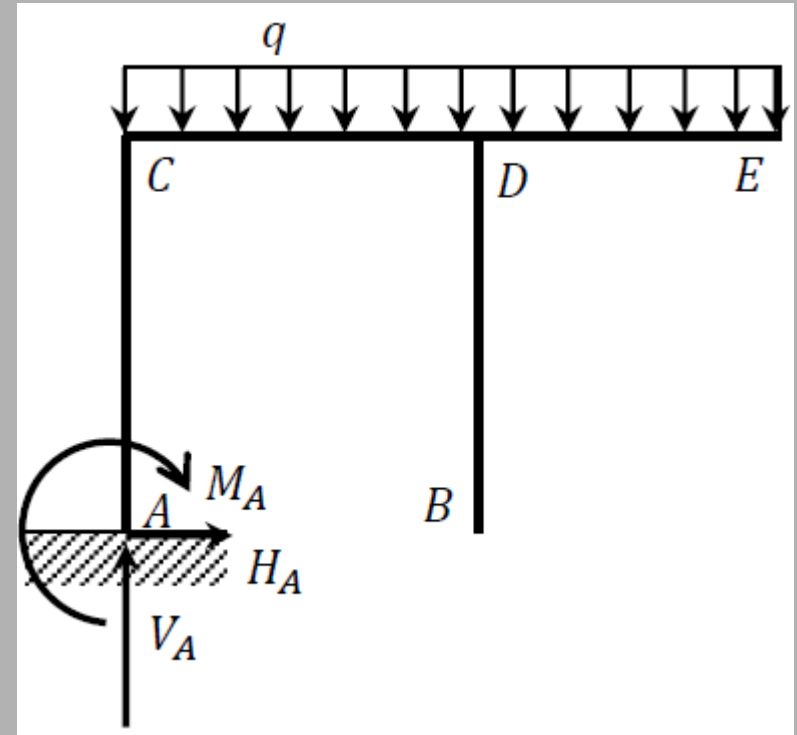
- Les liaisons surabondantes intérieures sont celles qui proviennent des contours fermés (on ouvrant le contour les efforts internes deviennent des inconnues supplémentaires).

(Figure 3.2b). Généralement, les structures hyperstatiques ont des liaisons surabondantes tant à l'extérieur qu'à l'intérieur (Figure 3.2c).

Le nombre de liaisons surabondantes représente le degré d'hyperstaticité du système.



Portique hyperstatique
(6 liaisons supplémentaires $d=6$)



Portique isostatique
(6 liaisons supplémentaires
supprimées)

3.2 CALCUL DU DEGRÉ D'HYPERSTATICITÉ

Comme il a été mentionné, le nombre de liaisons surabondantes constitue le degré d'hyperstaticité de la structure. Il existe plusieurs méthodes pour déterminer le degré d'hyperstaticité (noté H) ; nous en examinerons deux.

3.2.1 Méthode de la suppression des liaisons

La méthode consiste à supprimer des liaisons jusqu'à ce que la structure devienne isostatique *indéformable*. Le nombre de liaisons supprimées représente le degré d'hyperstaticité

3.2.2 Méthode des contours fermés

Le degré d'hyperstaticité est donné par :

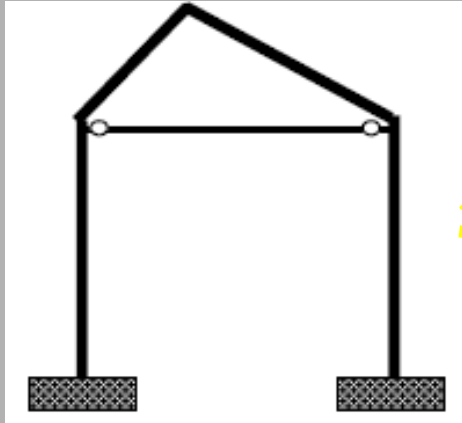
$$H = 3c - a - 2s$$

- "c" le nombre de contours de la structure
- "a" le nombre d'articulations (y compris les appuis doubles)
- "s" le nombre d'appuis simples

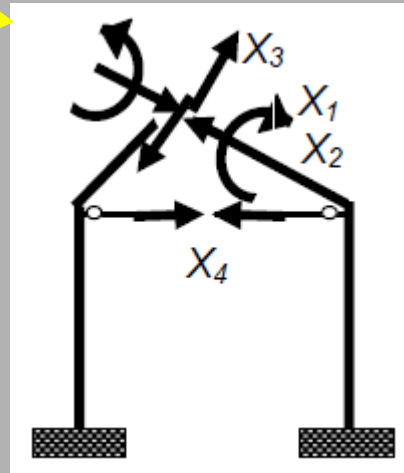
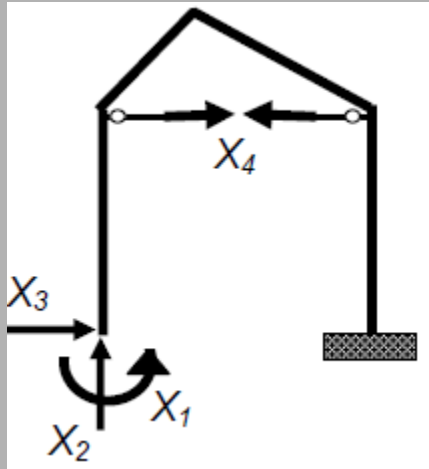
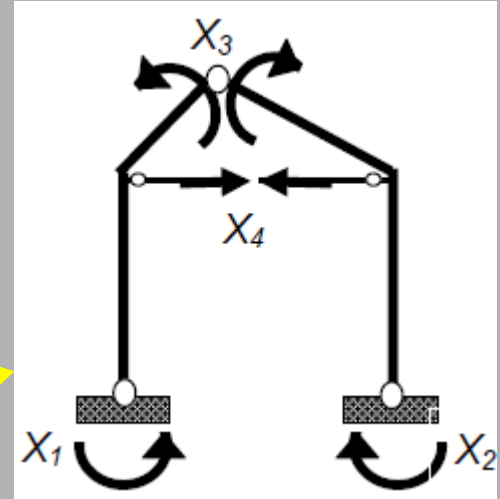
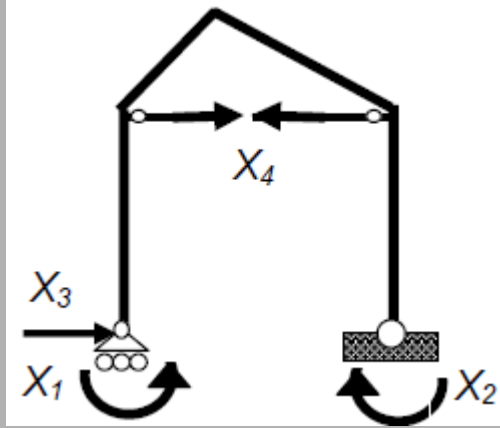
3.2.3 Cas des poutres en treillis chargées indirectement

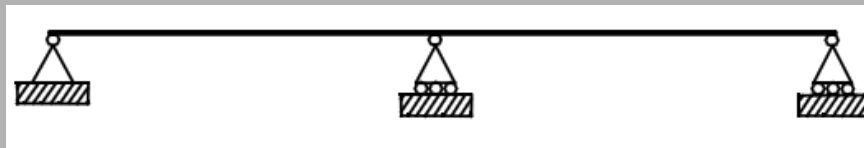
$$H = b + l - 2n$$

- $b + l - 2n < 0 \Rightarrow$ système déformable
- $b + l - 2n = 0 \Rightarrow$ système isostatique
- $b + l - 2n > 0 \Rightarrow$ système hyperstatique
- "b" nombre de barres
- "l" nombre de liaisons dans les appuis (encastrement = 3 ; appui double = 2; appui simple = 1)
- "n" nombre de nœuds

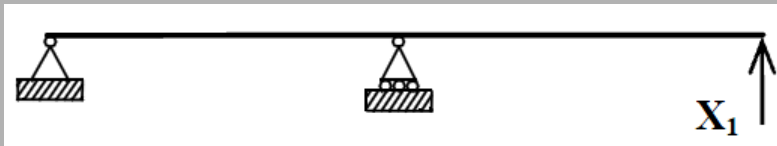


4 liaisons
surabondants
donc $h=4$

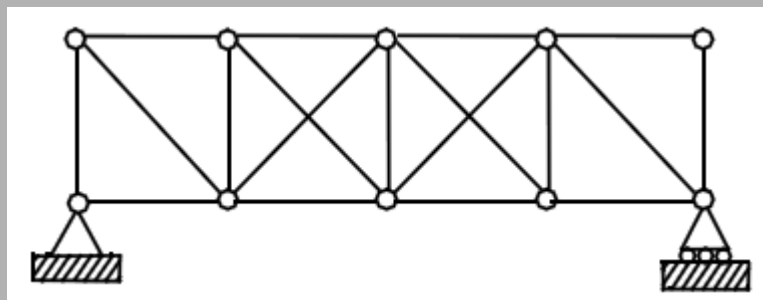
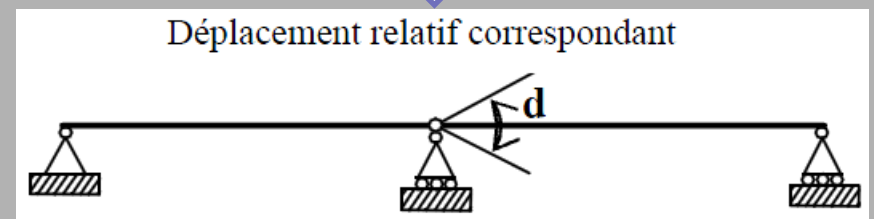
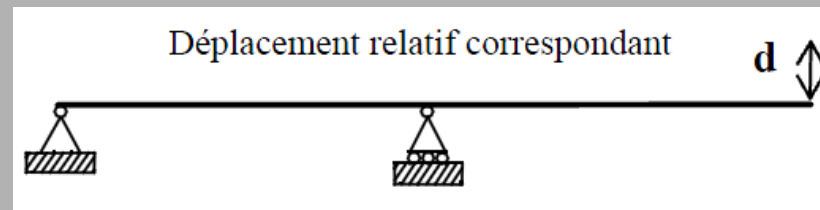
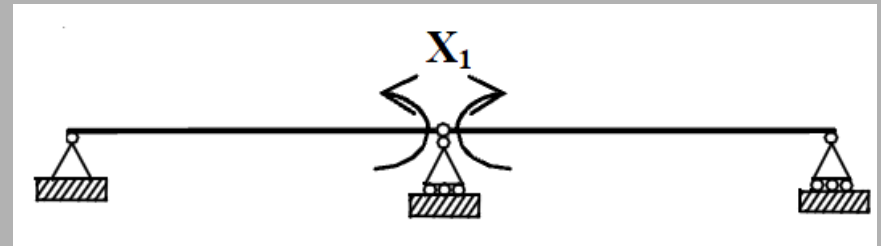




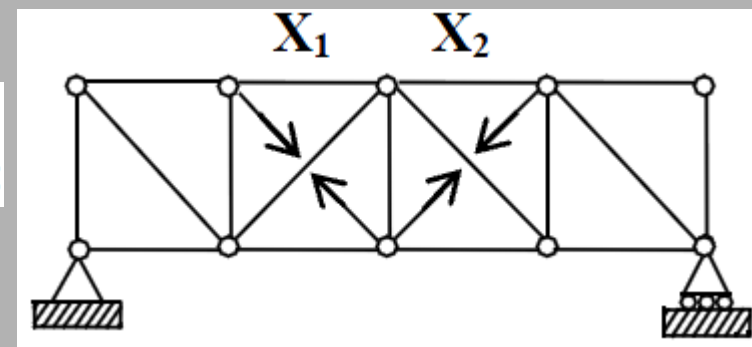
$h = 1$, donc une seule coupure :



ou



$h = 2$, donc deux coupures :



En raison de l'interdépendance entre les efforts et les déformations (donc les déplacements), il en résulte deux possibilités générales d'aborder le calcul des structures hyperstatiques, c'est-à-dire soit en s'intéressant aux efforts (dans les liaisons surabondantes) (méthode des forces), soit en s'intéressant aux déplacements (méthode des déplacements).

3.3. Méthode des forces

La méthode des forces s'applique aux structures hyperstatiques lorsque les liaisons sont rigides et parfaites. Elle est basée sur le choix d'un système de base qui permet d'identifier les réactions surabondantes et aussi le principe de superposition du système isostatique simple avec les charges réelles et des systèmes virtuels avec une charge unitaire.

Le principe de cette méthode consiste à remplacer la structure hyperstatique en une structure isostatique équivalente c'est-à-dire que les liaisons surabondantes sont remplacées par des réactions inconnues, ou par des efforts internes qui deviennent des inconnues supplémentaires qu'il faut calculer.

4.3.1. Equations canoniques :

Dans le paragraphe précédent nous avons noté que pour une structure hyperstatique, il faut utiliser en plus des trois équations d'équilibre, des équations supplémentaires. Dans la méthode des forces, ces équations sont connues sous le nom des équations "canoniques" de la méthode des forces.

Le système d'équations canoniques aux inconnues hyperstatiques constitue l'élément de base de la méthode des forces. Il permet de calculer les inconnues $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$.

Etant donné une structure n fois hyperstatique, soumis à des forces extérieures. Les équations canoniques de la méthode des forces s'écrivent sous la forme matricielle :

$$\sum_{i=1}^n X_i \delta_{ji}^u + \delta_{jF} = 0, \quad j=1, 2, \dots, n$$

Ou sous forme la forme analytique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{11}^u X_1 + \delta_{12}^u X_2 + \dots + \delta_{1n}^u X_n + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}^u X_1 + \delta_{22}^u X_2 + \dots + \delta_{2n}^u X_n + \delta_{2F} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \delta_{n1}^u X_1 + \delta_{n2}^u X_2 + \dots + \delta_{nn}^u X_n + \delta_{nF} = 0 \end{array} \right.$$

Chacune de ces équations exprime la condition selon laquelle dans un système hyperstatique, le déplacement généralisé correspondant à chacune des forces généralisées superflues inconnues $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ est égal à zéro.

- $[\delta_{ji}]$: matrice des coefficients de flexibilité.

- δ_{ji} : représente le coefficient de flexibilité c'est le déplacement produit dans la section (j) selon la direction de la force X_j causée par une force $X_i = 1$.

- δ_{jF} représente le déplacement produit dans la section (j) du système de base sous l'effet des charges appliquées (charges extérieures).
- Pour la détermination des déplacements généralisés, nous devons utiliser des intégrales de Mohr ou Veretchaguine (méthode graphique).

La signification et le calcul des coefficients δ_{ij}^u et δ_{iF} ont été exposés dans le chapitre 4 (RDM2).

Le coefficient général δ_{iF} représente le déplacement de la section i du système de base (dans la direction i, qui est aussi la direction de l'inconnue hyperstatique X_i) sous l'effet des charges appliquées (données) (F).

4.3.2. Evaluation des intégrales du type $\int_0^l m_j m_i dx$ par l'emploi de tableaux.

l'évaluation des coefficients δ_{ji} reposera sur les formules :

$$\begin{cases} \delta_{ji} = \delta_{ji} = \frac{1}{EI} \int_0^l m_j m_i dx \\ \delta_{jF} = \frac{1}{EI} \int_0^l M_F m_i dx \\ \delta_{jJ} = \frac{1}{EI} \int_0^l m_j m_J dx \end{cases}$$

Notant que les expressions des moments m_i et m_j sont toujours linéaires sauf pour les expressions de M_F . Nous pouvons calculer les coefficients de flexibilité δ_{ji} à l'aide des expressions analytiques données ci-dessous, aussi par la méthode graphique de Veretchaguine.

Les tableaux présentés ci-dessous permettent d'évaluer ces intégrales pour certains cas de charges extérieures.

4.3.3. La procédure de la méthode des forces :

- Déterminer le degré d'hyperstaticité $d = n$.
- Ecrire les n équations canoniques.
- Choisir le système de base (système isostatique le plus simple) .
- Tracer le diagramme des moments fléchissants MF du système isostatique due aux charges extérieures ($X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0$)
- Tracer les diagrammes ou épures unitaires m_i $i = 1 \dots n$ correspondant au système isostatique sans charges extérieures et avec $X_1 = 1$ et les autres inconnus nuls.
- On calcul tous les coefficients δ_{ji} et δ_{jF} à l'aide des diagrammes.
- Résolution du système d'équations canoniques
- Correction des épures unitaires $m_i^* = m_i X_i (i = 1 \dots n)$. $m_1^* = m_1 X_1$,
 $\dots, m_n^* = m_n X_n$.

- On fait la somme des épures unitaires corrigées

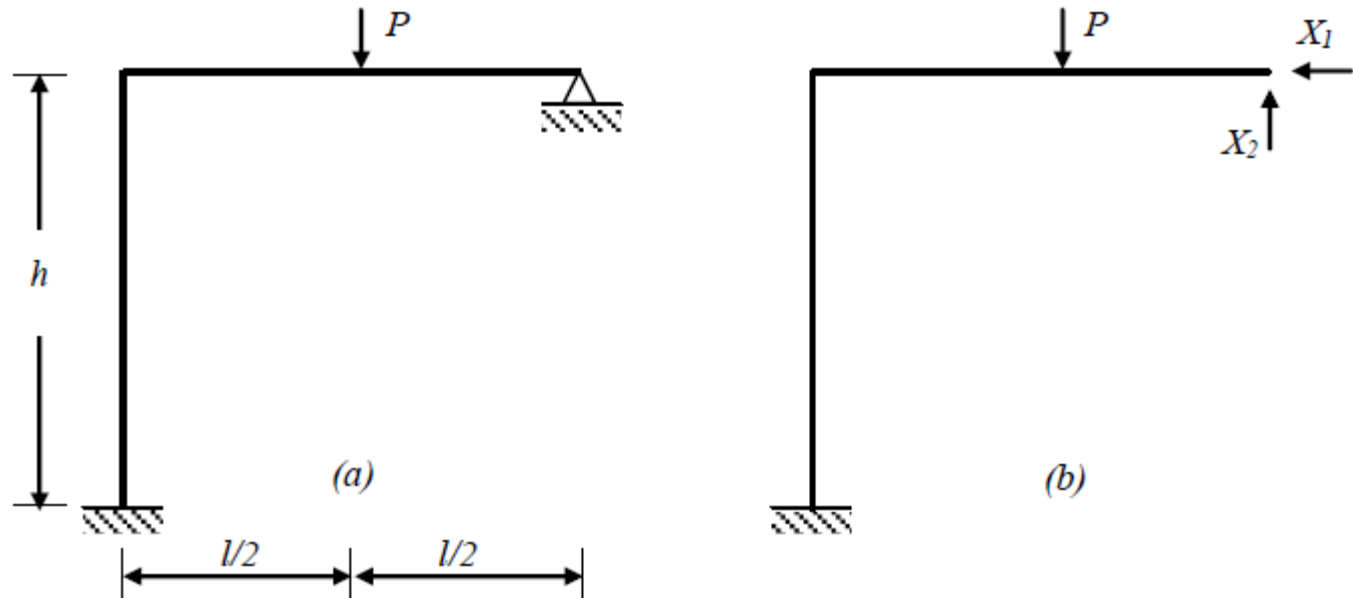
$$\sum m_i^* = m_1^* + m_2^* + \dots + m_n^*$$

-En dernier, on obtient le diagramme des moments fléchissants final du système hyperstatique réel en faisant la somme des moments suivants

$$M_{\text{final}} = M_F + \sum m_i^*$$

Exemple 1 : inconnues hyperstatiques externes.

Soit à résoudre le portique. Pour les calculs, on considère $h=l=a$.

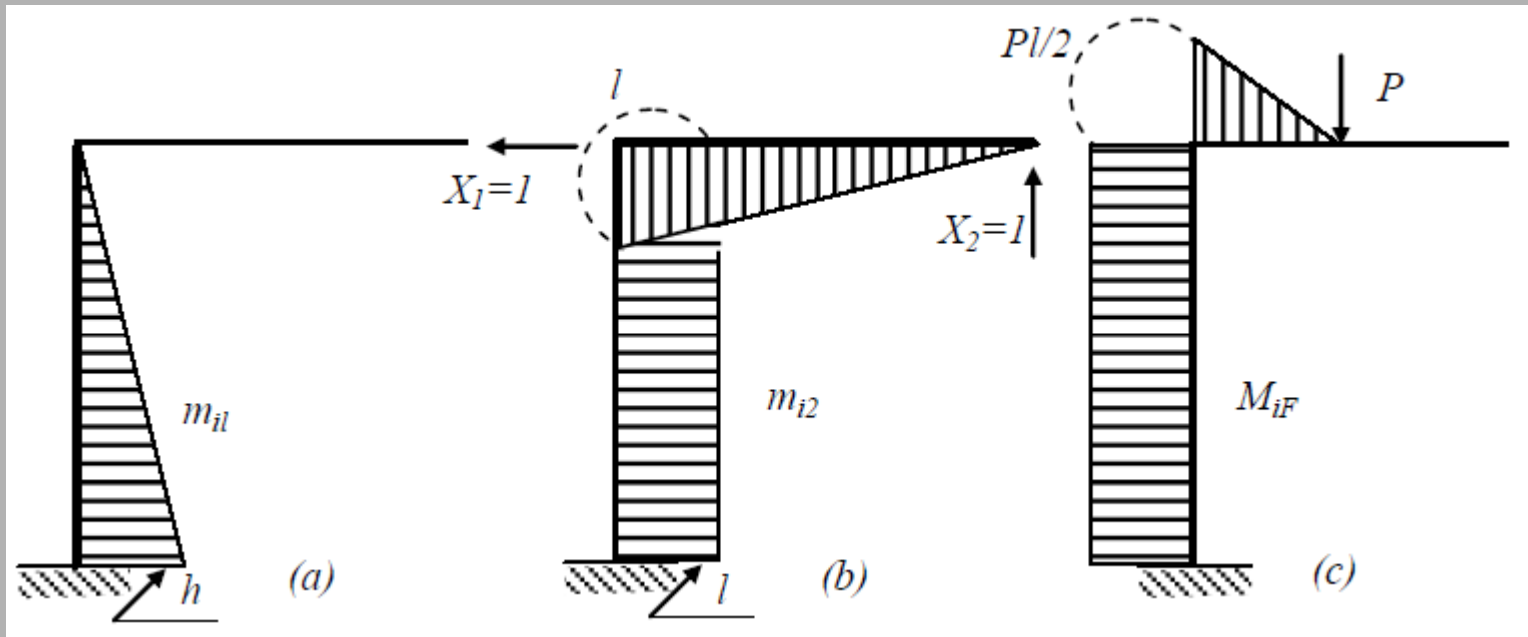


Les équations canoniques du système s'écrivent :

$$\delta_{11}^u X_1 + \delta_{12}^u X_2 + \delta_{1F} = 0$$

$$\delta_{21}^u X_1 + \delta_{22}^u X_2 + \delta_{2F} = 0$$

Les coefficients δ_{ij}^u sont obtenus en appliquant au système de base la sollicitation unitaire $X_1=1$ tandis que δ_{12}^u et δ_{22}^u s'obtiennent sous l'effet de la seule sollicitation $X_2=1$. Quant aux déplacements δ_{1F} et δ_{2F} , ils se calculent sous l'effet des charges extérieures (ici la force P) appliquées au système isostatique de base. Les diagrammes permettant le calcul de ces coefficients (cas où l'influence de M est prépondérante) sont montrés à la figure ci-dessous:



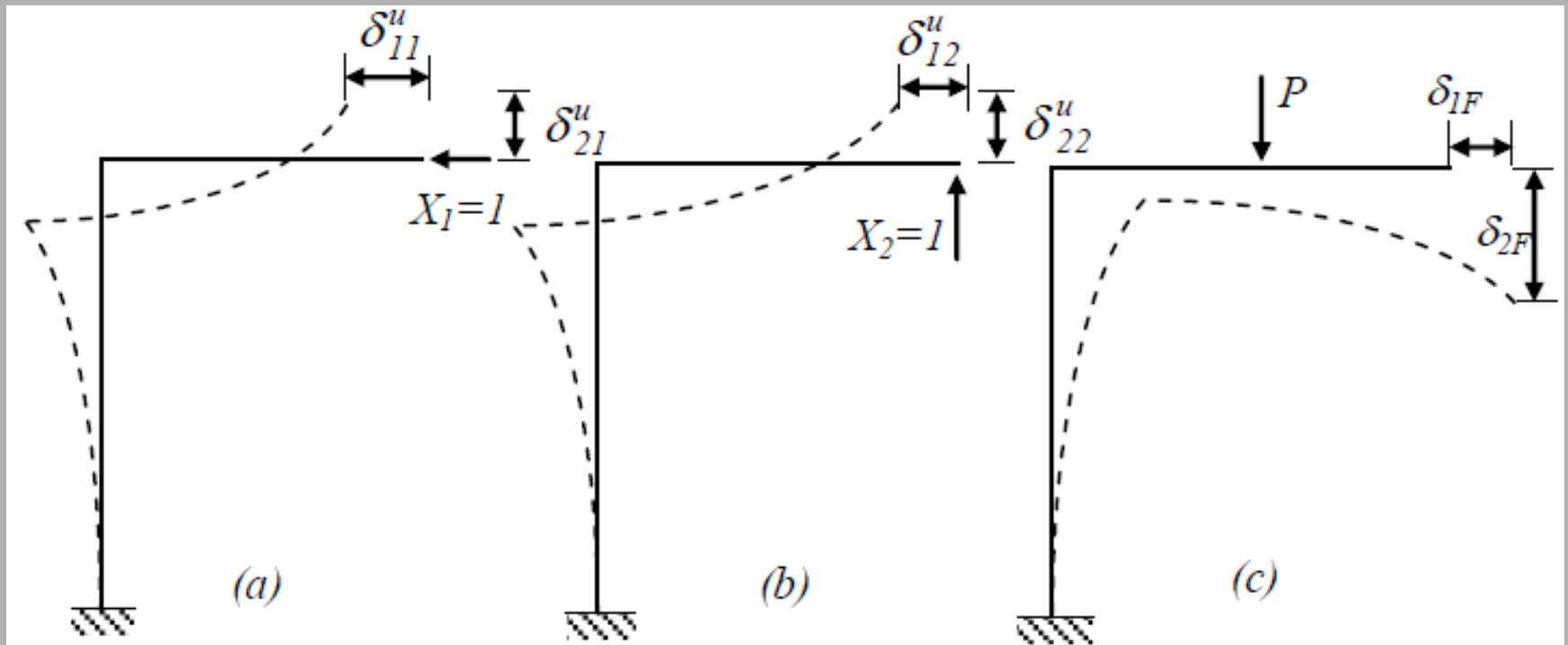
Diagrammes des moments M et m

On trouve, avec $h=l=a$:

$$\delta_{11}^u = \frac{a^3}{3EI} \quad \delta_{12}^u = \delta_{21}^u = \frac{a^3}{2EI} \quad \delta_{22}^u = \frac{4a^3}{3EI}$$

$$\delta_{1F} = -\frac{Pa^3}{4EI} \quad \delta_{2F} = -\frac{29Pa^3}{48EI}$$

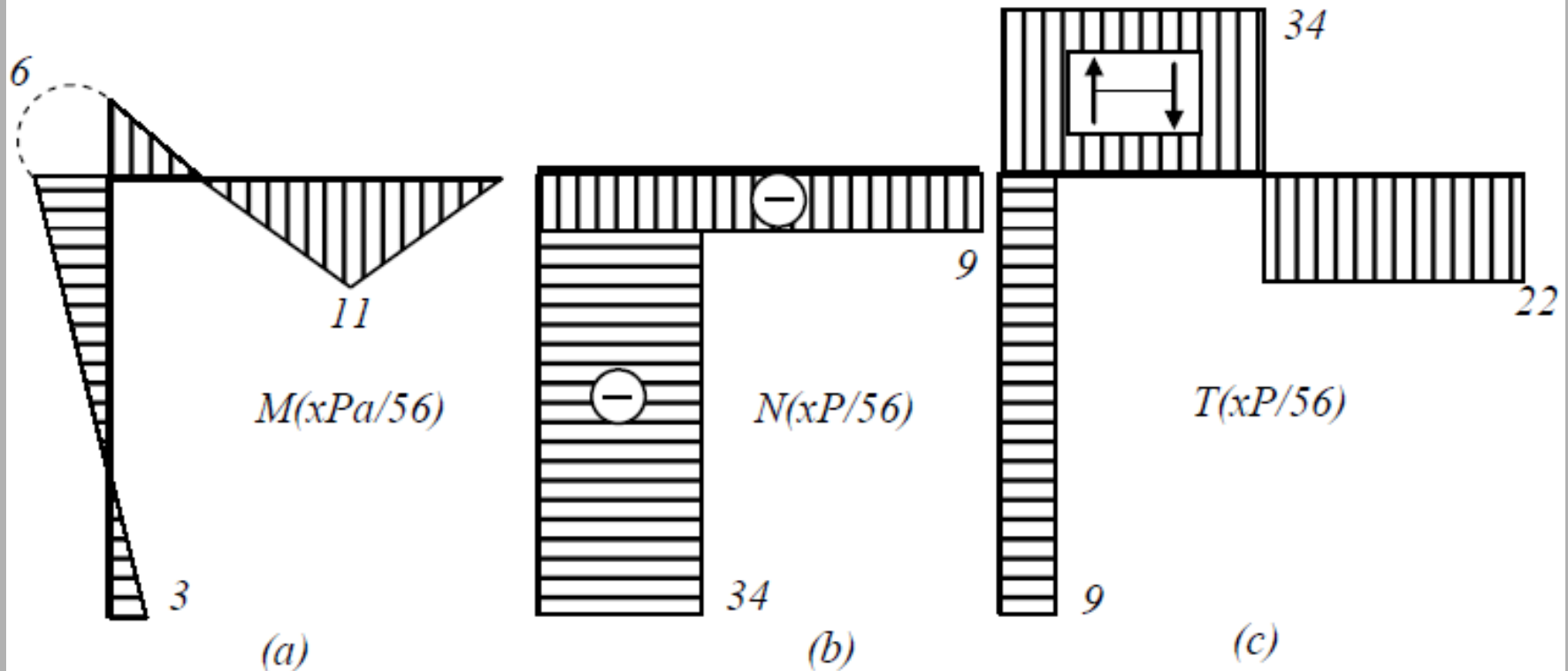
La figure suivante montre la signification de ces coefficients.



Et à partir des équations du système on tire :

$$X_1 = \frac{9}{56} P \text{ et } X_2 = \frac{22}{56} P$$

Les diagrammes M , N , T peuvent être construits maintenant



Diagrammes M , N , T