

Exercice 01 : Déterminer l'expression de la déformée d'une console soumise à un couple M_0 :



Figure 1

$$H_A = V_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_0 - M_A = 0 \Rightarrow M_A = M_0$$



$$\sum M(x) = 0$$

$$M(x) = M_0$$

$$f(x) = \iint \frac{M}{EI} dx = \iint \frac{M_0}{EI} dx = \int \left(\frac{M_0}{EI} x + C_1 \right) dx$$

$$f(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_0}{2} x^2 + C_1 x + C_2 \right)$$

$$\theta(x) = \frac{M_0}{EI} x + C_1$$

Calcul des constantes d'intégration:

Condition d'appui:

$$x = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \theta(x) = 0$$

$$\theta(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, f(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$f(x) = \frac{M_0}{2EI} x^2$$

Exercice 02 : pour la poutre ABCDE, déterminer la flèche V_C au point C, et la flèche V_E au point E de la poutre illustrée à la Figure 2.

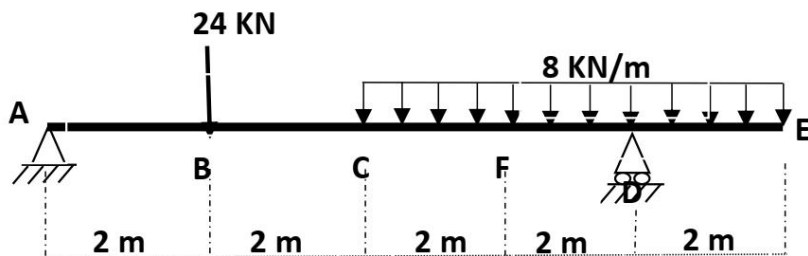
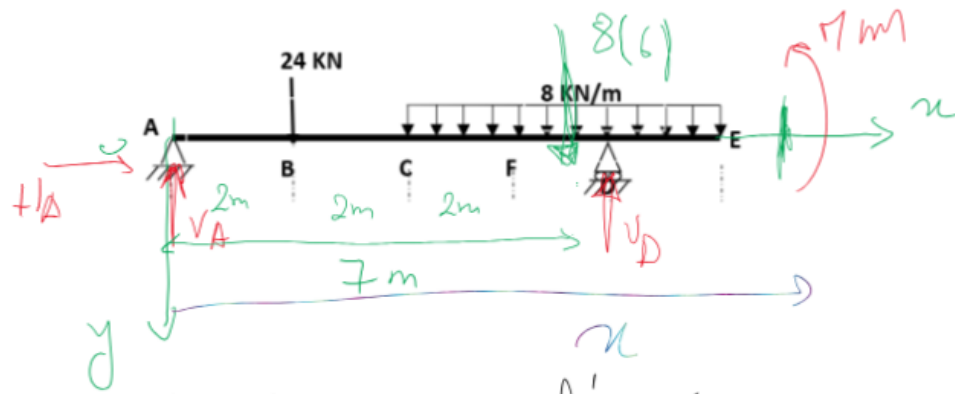


Figure 2

EI constant, avec $E = 31000 \text{ MPa}$, et $A = (b = 30) \times (h = 40) \text{ cm}^2$



1/ Calculer les réactions d'appuis.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_A + V_D = 24 + 8(6) = 72$$

$$\textcircled{+} \sum M_A = 0 \rightarrow V_D(8) - 24(2) - 8(6 \cdot 7) = 0$$

$$V_D = 48 \text{ kN} \Rightarrow V_A = 24 \text{ kN}$$

2/ L'expression de la flèche et la rotation :

$$\textcircled{+} \sum M_x = 0 \Rightarrow M(x) - 24x + 24(x-2) + \frac{8}{2}(x-4)^2 - 48(x-8) = 0$$

$$M(x) = 24x - 24(x-2) - \frac{4}{2}(x-4)^2 + 48(x-8) = 0$$

$$EI \theta(x) = \int M(x) dx = \int 24x - 24(x-2) - \frac{4}{2}(x-4)^2 + 48(x-8) dx$$

$$EI \theta(x) = \frac{24}{2}x^2 - \frac{24}{2}(x-2)^2 - \frac{4}{3}(x-4)^3 + \frac{48}{2}(x-8)^2 + C_1$$

$$EI f(x) = \int \left(12x^2 - 12(x-2)^2 - \frac{4}{3}(x-4)^3 + 24(x-8)^2 + C_1 \right) dx$$

$$EI f(x) = 4x^3 - 4(x-2)^3 - \frac{1}{3}(x-4)^4 + 8(x-8)^3 + C_1x + C_2$$

* les conditions d'appuis:

$$f(0)=0, f(8)=0$$

$$f(0)=0 \Rightarrow -4(-2)^3 - \frac{1}{3}(-4)^4 + 8(-8)^3 + C_2 = 0$$

$$32 - \frac{256}{3} - 4096 + C_2 = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = 4149,33$$

$$f(8)=0 \Rightarrow 4(8)^3 - 4(6)^3 - \frac{1}{3}(4)^4 + C_1 \cdot 8 + 4149,33 = 0$$

$$2048 - 864 - \frac{256}{3} + 8 \cdot C_1 + 4149,33 = 0$$

$$C_1 = -656$$

$$EI f(x) = 4x^3 - 4(x-2)^3 - \frac{1}{3}(x-4)^4 - 8(x-8)^3 - 656x + 4149,33$$

$$V_c = f(4) = \frac{1}{EI} (4 \cdot (4)^3 - 4(2)^3 + 8(-4)^3 - 656(4) + 4149,33)$$

$$= \frac{1}{EI} (256 - 32 - 512 - 2624 + 4149,33)$$

$$= \frac{1237,33}{EI}$$

$$E = 31000 \text{ MPa (N/mm}^2\text{)} = \frac{31000 \times 10^{-3}}{10^6} = 31 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$I = \frac{0,3 \times (0,4)^3}{12} = 1,6 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$V_c = \frac{1237,33}{31 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-3}} = \frac{1237,33}{49,6 \times 10^3} = 0,0249 \text{ m}$$

$$V_c = 24,9 \text{ mm} \downarrow \oplus$$

$$* V_E = f(10) = \frac{1}{EI} (4(10)^3 - 4(8)^3 - \frac{1}{3}(6)^4 + 8(2)^3 - 656(10) + 4149,33)$$

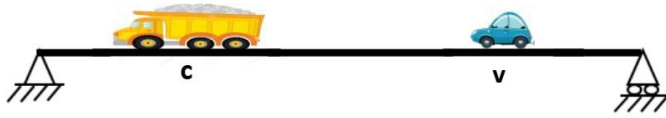
$$= \frac{1}{EI} (4000 - 2048 - 432 + 64 - 6560 + 4149,33)$$

$$V_E = \frac{-826,67}{EI} = \frac{-826,67}{49,6 \times 10^3} = -0,0166 \text{ m}$$

$$V_E = -16,6 \text{ mm} \uparrow \ominus$$

Exercise 03 :

Exercice 04 : Un camion stationné en un point c d'un pont cause une flèche de $\delta_c = 52 \text{ mm}$ au point c et $\delta_v = 38 \text{ mm}$ au point v . Par la suite, une voiture de 1000 kg s'amène au point v du pont. On mesure les flèches à nouveau et on trouve $\delta_c = 53 \text{ mm}$ et $\delta_v = 40 \text{ mm}$. On demande quelle est la masse du camion?



C est la masse du camion et V est celle de la voiture

$$(\delta_c)_c = 52 \text{ mm} \quad , \quad (\delta_v)_c = 38 \text{ mm}$$

$$\left. \begin{array}{l} (\delta_c)_c + (\delta_c)_v = 53 \text{ mm} \\ (\delta_v)_c + (\delta_v)_v = 40 \text{ mm} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (\delta_c)_v = 53 - 52 = 1 \text{ mm} \\ (\delta_v)_v = 40 - 38 = 2 \text{ mm} \end{array}$$

L'Application de Théorème de Maxwell - Betti :

$$C (\delta_c)_v = V (\delta_v)_c \Rightarrow C = V \frac{(\delta_v)_c}{(\delta_c)_v}$$

$$C = 1000 \frac{38}{1} = 38000 \text{ kg}$$