الفصل الثاني

حركية النقطة المادية

مقدمة

مفاهيم عامة

الغرض من حركية (cinématique)النقطة هو دراسة حركة نقطة ما بمرور الوقت بغض النظر عن الأسباب التي أدت الى هذه الحركة, حيث يصف حركة الجسم من خلال تغير وضعيته ، سرعته، تسارعه مساره و المسافة التي قطعها خلال مدّة حركته.

الحركة و السكون مفهومان نسبيان، فلا يمكننا أن نقول بأن جسم ما في حالة سكون مطلقا، أو في حالة حركة مطلقا.

المرجع هو جسم فيزيائي نختاره قصد دراسة حركة جسم فيزيائي آخر، فننسب حركة الجسم الثاني للجسم الأول.

حتى نتمكن من الدراسة الحركية لجسم ما، بالنسبة لمرجع، لا بد أن نرفق لهذا المرجع معلما، يمكننا من خلاله تحديد موضع الجسم في أي لحظة بالنسبة له.

نختار المعلم $R(O, x, y, z)$ إذا كانت الحركة في الفضاء، و $R(O, x, y)$ إذا كانت الحركة مستوية. أما إذا كانت على استقامة واحدة فيكفي اختيار $R(O, x)$ كمعلم.

يمكننا اعتبار جسم ما كنقطة مادية إذا كانت أبعاده صغيرة جدا (مهملة) مقارنة بأبعاد مرجع الدراسة. كتلة هذه النقطة المادية هي نفسها كتلة الجسم

مميزات الحركـــــــة

لدراسة حركة الأجسام ، ينبغي على المشاهد تحديد معلم تُنسب إليه الحركة مع اختيار جملة احداثيات معينة لوصف الحركة حيث ان جمل الإحداثيات الأكثر استعمالًا في الميكانيك هي الإحداثيات الكارتيزية ، القطبية ، الأسطوانية ، الكروية والذاتية.و يعبر عن حركة النقطة المادية او الجسم الصلب بثلاث مقادير شعاعية :

*شعاع الموضع.

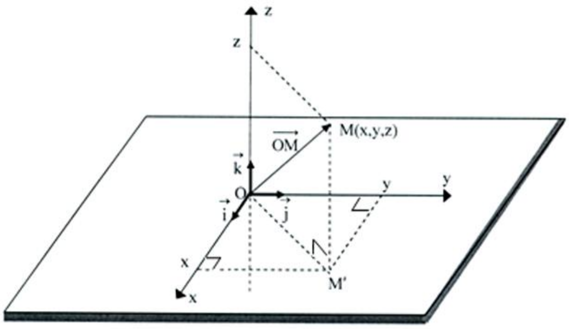
*شعاع السرعـة.

*شعاع التسارع.

أنظمة الإحداثيات

1.1 نظام الإحداثيات الكارتيزية

يتكون مرجع الفضاء من نقطة المبدا O في نظام الإحداثيات، بالإضافة إلى ثلاثة محاور مرجعية متعامدة. هذه المحاور متعامدة فيما بينها ومرتبطة بوحدة طول، ممثلة بشعاع وحدة قياسه 1. يتيح هذا المرجع للمراقب تحديد اتجاه نقطة ما في الفضاء. تشكل المحاور الثلاثة معًا قاعدة ثلاثيَّة مباشرًة.



صورة المعلم في مستوي وفي الفضاء21

❖ شعاع الموضع

يعرّف موضع نقطة مادية متحركة M في لحظة ما t في معلم فضائي كارتيزي $R(O,x,y,z)$ بشعاع يسمى شعاع الموضع و نرمز له بـ: $\overrightarrow{OM}(t)$ حيث:

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

ملاحظة: إذا كانت النقطة المادية في حالة سكون فإن احداثياتها x, y, z مستقلة عن الزمن. أما إذا كانت في حالة حركة فإن هذه الاحداثيات تابعة للزمن و نكتب: $x(t), y(t), z(t)$.

طويلة الشعاع $\overrightarrow{OM}$:

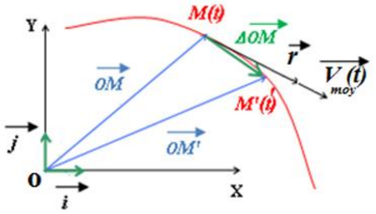
$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

المسار هو المواضع الهندسية المتتالية التي تشغلها النقطة المادية اثناء الحركة

❖ شعاع الانتقال

إذا كان المتحرك موجودا في موضع M عند لحظة t، ثم انتقل إلى موضع M' عند اللحظة t'، عندها نسمي شعاع الانتقال، الشعاع $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'}(t') - \overrightarrow{OM}(t)$

❖ شعاع السرعة المتوسطة



يعرف شعاع السرعة المتوسطة بين لحظتين t و t' بـ:

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\text{شعاع الانتقال}}{\text{المدة الزمنية}} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM}(t')-\overrightarrow{OM}(t)}{t'-t} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$$

❖ شعاع السرعة اللحظية

إذا كان t' قريبا جدّا من t

(أي $\Delta t = t' - t \to 0$)، فإن السرعة المتوسطة تؤول إلى السرعة اللحظية، نرمز لها بـ: $\vec{V}(t)$ حيث:

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \vec{V}_{moy} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$$

في المعلم الكارتيزي $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{V}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

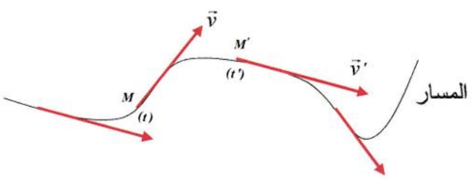
$$= V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$$

يمكن أيضا كتابة $\vec{V}(t) = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}$

شدة شعاع السرعة اللحظية: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

ملاحظة

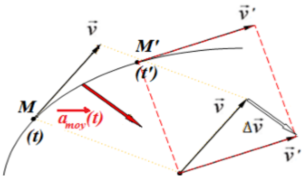
يكون شعاع السرعة دوما مماسي للمسار في النقطة M وجهته في جهة الحركة



شعاع السرعة اللحظية

❖ شعاع التسارع

التسارع المتوسط



إذا كانت سرعة المتحرك عند لحظة t هي $\overrightarrow{V(t)}$، و عند اللحظة t' هي $\overrightarrow{V'(t)}$عندها نسمي شعاع التسارع المتوسط معرف كما يلي

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{V'} - \vec{V}}{t' - t} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

شعاع التسارع اللحظي

يعرف التسارع اللحظي بانه مشتق السرعة اللحظية

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V'} - \vec{V}}{t' - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

و تكون قيمته هي

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

ملاحظة

- إذا كانت $\vec{a} = \vec{0}$ ← الحركة منتظمة أو ساكنة .
- $\vec{a} = \overrightarrow{Cst}$ ← الحركة متغيرة بانتظام .
- إذا كان : $\vec{a}$ و $\vec{V}$ في نفس الاتجاه ← الحركة متسارعة $(\vec{a}.\vec{V} > 0)$.
- إذا كان : $\vec{a}$ و $\vec{V}$ في اتجاهين متعاكسين ← الحركة متباطئة $(\vec{a}.\vec{V} < 0)$

مثال

إذا كان شعاع الموضع في المعلم الديكارتي يعطى بـ: $\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} x = 2t^2 \\ y = 4t - 5 \\ z = t^3 \end{pmatrix}$

1- استنتج شعاع السرعة و شعاع التسارع اللحظيين عند لحظة كيفية t، و ما هي عبارة شدة كل منهما؟

2- استنتج شدة كل منهما عند اللحظة $t = 2s$.

الحل

$$\vec{V}(t) = 4t\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3t^2\vec{k} \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{16t^2 + 16 + 9t^4}$$

$$\vec{a}(t) = 4\vec{\imath} + 6t\overrightarrow{k} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{16 + 36t^2}$$

$$t = 2s \;\Rightarrow\; \vec{V}(t) = 8\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 12\vec{k} \quad V = \sqrt{64 + 16 + 144} = 14{,}97 m/s$$

$$\vec{a}(t) = 4\vec{\imath} + 12\overrightarrow{k} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{16 + 144} = 12{,}65 m/s^2$$

2.2الاحداثيات القطبية ذات القاعدة $(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta})$

❖ شعاع الموضع

يعبرعن شعاع الموضع في الاحداثيات القطبية بالعبارة $\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}_\rho$

و تعطى طويلته ب $\|\overrightarrow{OM}\| = \rho$

❖ شعاع السرعة

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta = v_\rho.\vec{u}_\rho + v_\theta.\vec{u}_\theta$$

و تكون طويلته هي

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho.\dot{\theta})^2}$$

❖ شعاع التسارع

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{V}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\,\vec{u}_\rho+\rho.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta\right)$$

$$\vec{a}(t)=\ddot{\rho}\,\vec{u}_\rho+\dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}+\dot{\rho}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta+\rho.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta+\rho.\dot{\theta}.\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

2.3الاحداثيات الاسطوانية $(\vec{u_\rho}\,\vec{u_\theta},\vec{k})$

❖ شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}=\rho\vec{u}_\rho+z\vec{k}$

و طويلته هي $\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{\rho^2+z^2}$

❖ شعاع السرعة $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d}{dt}(\rho\vec{U}_\rho+z\vec{k})$

$$\vec{V}=\frac{d\rho}{dt}\,\vec{U}_\rho+\rho\frac{d\vec{U}_\rho}{dt}+\frac{dz}{dt}\,\vec{k}$$

$$\vec{V}=\dot{\rho}\vec{u}_\rho+\rho.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta+\dot{z}\vec{k}$$
$$\vec{V}=\vec{V}_\rho+\vec{V}_\theta+\vec{V}_z$$

❖ شعاع التسارع

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\,\vec{u}_\rho+\rho.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta+\dot{z}\vec{k}\right)$$

$$\vec{a}=\ddot{\rho}\,\vec{u}_\rho+\dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}+\dot{\rho}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta+\rho\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta+\rho.\dot{\theta}.\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}+\ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a}=\ddot{\rho}\,\vec{u}_\rho+\dot{\rho}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta+\dot{\rho}.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta+\rho\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta-\rho.\dot{\theta}^2\,.\vec{u}_\rho+\ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a}=\left(\ddot{\rho}-\rho.\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_\rho+\left(2\dot{\rho}.\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta+\ddot{z}\vec{k}$$

ملاحظة

يتميز المعلم القطبي $\left(o,\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta\right)$ بكون أشعة الواحدة $\vec{u}_\rho$ و $\vec{u}_\theta$ غير ثابتة , فعندما تنتقل النقطة M من موقع إلى موقع أخر فان الزاوية θ تتغير و يتغير معها اتجاهي $\vec{u}_\rho$ و $\vec{u}_\theta$ و نتيجة لذلك فان مشتقات $\vec{u}_\rho$ و $\vec{u}_\theta$ ليست معدومة . عندما نشتق بالنسبة للمتغير t لدينا :

$$\vec{u}_\rho = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \quad \text{و} \quad \vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta = \theta'.\vec{u}_\theta \;\; ; \;\; \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\rho = -\theta'.\vec{u}_\rho$$

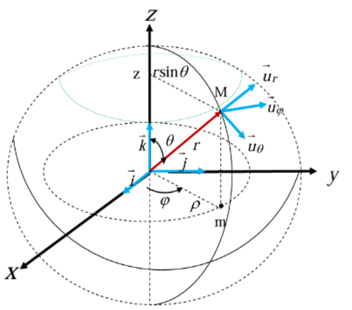
$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} = \vec{u}_\theta$$

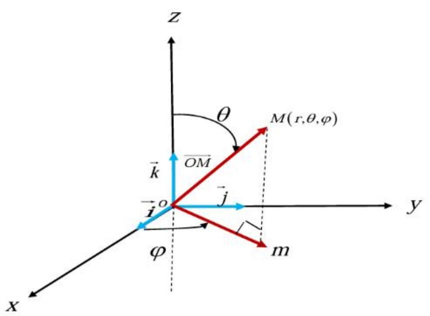
العلاقة بين الاحداثيات القطبية و الكارتيزية

$$y = \rho\sin\theta \quad x = \rho\cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$$

2.4الاحداثيات الكروية ذات القاعدة $(\overrightarrow{u_r}\ ,\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_\varphi})$





$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta\left(\overrightarrow{Oz},\overrightarrow{OM}\right) : 0 \le \theta \le \pi \\ \varphi\left(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{Om}\right) : 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le \infty \end{cases}$$

نعوض ب $\rho = r\sin\theta$

فنجد

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

- شعاع الموضع في الاحداثيات الكروية هو $\overrightarrow{OM} = r\vec{U}_r$

و طويلته هي $\|\overrightarrow{OM}\| = r$

- شعاع السرعة هو

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}:$$

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{U}_r + r\frac{d\vec{U}_r}{dt}$$

$$\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\sin\theta\,\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\,\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k})$$

$$\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{U}_\varphi$$

- اذن

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{U}_r + r\frac{d\vec{U}_r}{dt}$$

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{U}_r + r.\dot{\theta}.\vec{U}_\theta + r.\dot{\varphi}.\sin\theta\vec{U}_\varphi$$

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_\theta + \vec{V}_\varphi$$

- شعاع التسارع هو $= \vec{\gamma}(t)$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{U}_r + r.\dot{\theta}.\vec{U}_\theta + r.\dot{\varphi}.\sin\theta\vec{U}_\varphi\right)$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{U}_r + \dot{r}\frac{d\vec{U}_r}{dt} + \dot{r}.\dot{\theta}.\vec{U}_\theta + r.\ddot{\theta}.\vec{U}_\theta + r.\dot{\theta}.\frac{d\vec{U}_\theta}{dt} + \dot{r}.\dot{\varphi}.\sin\theta\vec{U}_\varphi$$

$$+r.\ddot{\varphi}.\sin\theta\vec{U}_\varphi + r.\dot{\theta}.\dot{\varphi}.\cos\theta\vec{U}_\varphi + r.\dot{\varphi}.\sin\theta\frac{d\vec{U}_\varphi}{dt}$$

مع العلم ان اشعة الوحدة هي $\overrightarrow{OM} = r\vec{U}_r \Rightarrow \vec{U}_r = \dfrac{r\sin\theta\cos\varphi\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\vec{j} + r\cos\theta\vec{k}}{r}$

$$= \sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k}$$

بما أن $\vec{U}_r \perp \vec{U}_\theta$:

- يكفي إضافة $\frac{\pi}{2}$ إلى θ لإيجـــاد $\vec{U}_\theta$
- نحصل على $\vec{U}_\varphi$ بـــ : $\vec{U}_\varphi = \vec{U}_r \wedge \vec{U}_\theta$

اذن اشعة الوحدة في الاحداثيات الكروية هي

$$\vec{U}_r = \sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k}$$
$$\vec{U}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}$$
$$\vec{U}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\vec{j} + \sin\theta\vec{k}$$

علما أن : $\vec{U}_\varphi = \vec{U}_r \wedge \vec{U}_\theta$

تسمية الزوايا قد تختلف من مرجع إلى آخر. $\theta(Oz, OM), \varphi(Ox, Om)$

و

$$\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(sin\theta\ cos\varphi\ \vec{\imath} + sin\theta\ sin\varphi\ \vec{\jmath} + \cos\theta\ \vec{k})$$
$$\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\ \vec{U}_\varphi$$

$$\dot{\overrightarrow{u_r}} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{\varphi}sin\theta\overrightarrow{u_\varphi}$$
$$\dot{\overrightarrow{u_\varphi}} = -\dot{\varphi}(sin\theta\overrightarrow{u_r} + cos\theta\overrightarrow{u_\theta})$$
$$\dot{\overrightarrow{u_\theta}} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_r} + \dot{\varphi}cos\theta\overrightarrow{u_\varphi}$$

اذن شعاع التسارع هو

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\left(\dot{\varphi}\sin\theta\right)^2\right)\vec{U}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{U}_\theta +$$
$$\left(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{U}_\varphi$$
$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta + \vec{a}_\varphi$$

مثال

أوجد الإحداثيات الكارتيزية للنقطة : $M\left(5,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$

الحل : للإنتقال من

الإحداثيات الكروية إلى

الإحداثيات الكارتيزية

أي:

$(x,y,z)\leftarrow(r,\theta,\varphi)$

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi=5\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}=5\frac{\sqrt{2}}{4} \\ y=r\sin\theta\sin\varphi=5\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=5\frac{\sqrt{2}}{4} \\ z=r\cos\theta=5\cos\frac{\pi}{6}=5\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$M\left(5\frac{\sqrt{2}}{4},5\frac{\sqrt{2}}{4},5\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\leftarrow M\left(5,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$$

2.5الاحداثيات المنحنية

إذا كان المسار منحنيا، تسمى الحركة منحنية. لدراسة هذه الحركة يمكن استعمال الاحداثيات الديكارتية ، لكن يستحسن استعمال نوع خاص من الاحداثيات تسمى بالاحداثيات الذاتية $(Intrinsèque)$، و هي عبارة عن جملة من الاحداثيات مرفقة بقاعدة متعامدة متجانسة $(\overrightarrow{u_T},\overrightarrow{u_N})$ تسمى بقاعدة فريني $(Base\ de\ frenet)$.

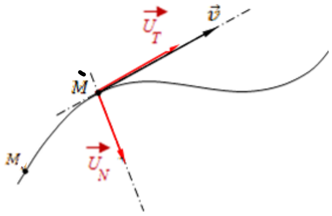
$\overrightarrow{u_T}$: شعاع الوحدة المماسي، يكون مماسيا للمسار، و اتجاهه في اتجاه شعاع السرعة (اتجاه الحركة)

$\overrightarrow{u_N}$: شعاعا الوحدة الناظمي، يكون عموديا على شعاع الوحدة المماسي، و اتجاهه دوما نحو تقعر المسار.

M : موضع المتحرك عند اللحظة t.

$\grave{M}$: موضع المتحرك عند اللحظة ẗ.

و عندها تكون النقطة M قد قطعت



$$M\ \grave{M}=S(t)$$

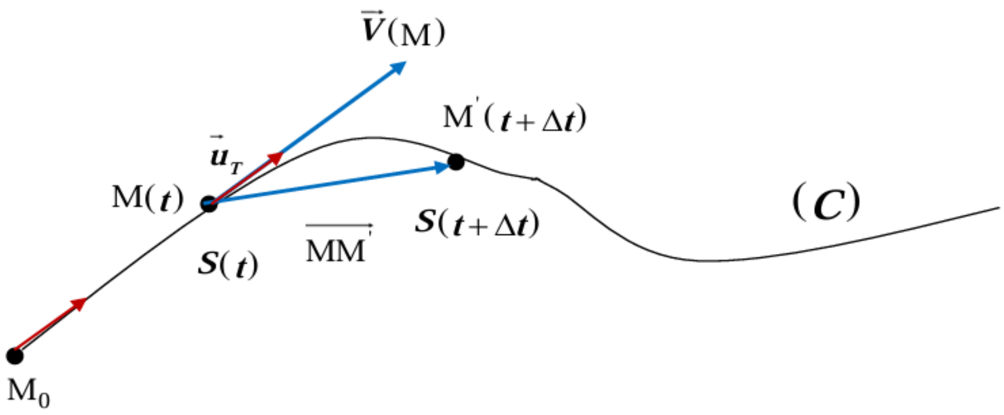
و تكون عبارة شعاع السرعة هي$\overrightarrow{V(M)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M\grave{M}}{\Delta t}$

لما : $\Delta t \to 0$ فان : $M' \to M$ و يصير الشعاع مماسي للمسار (C) في M و طويلته

$\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|$ تساوي طول القوس MM' حيث : $MM' = \Delta S$.

يمكن كتابة

$$\vec{V}(M) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|} \frac{\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \vec{U}_T$$



$\vec{U}_T$ هو شعاع الواحدة لشعاع MM' . عندما يؤول الى الصفر $(\Delta t \to 0)$ يصير $\vec{U}_T$ يمثل شعاع الواحدة المماسي للمسار في M و الموجه في اتجاه الحركة .

اذن :

$$\vec{V}(M) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} \vec{U}_T = \frac{dS}{dt} \vec{U}_T$$

أي

$$\vec{V}(M) = \dot{S}(t) \vec{U}_T$$

شعاع التسارع

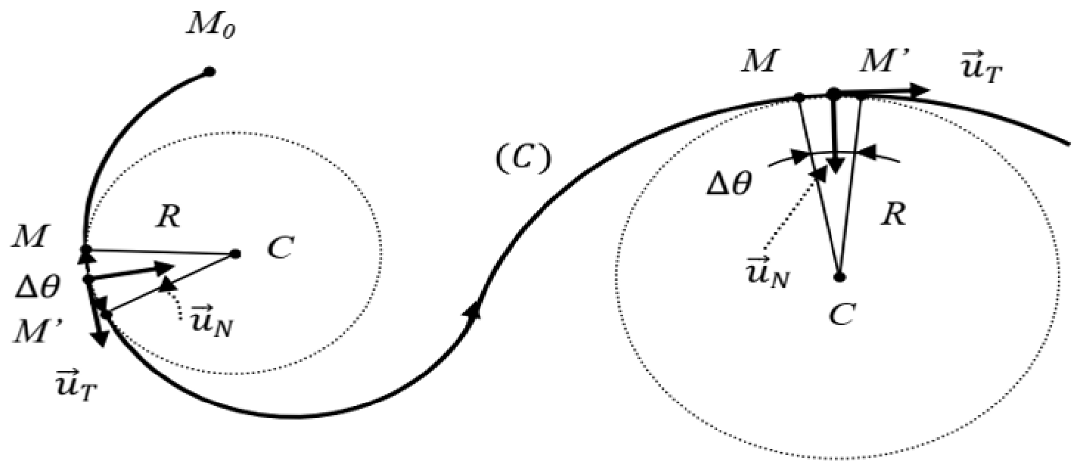
$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dS}{dt}\vec{U}_T\right]$$

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d^2S(t)}{dt^2}\vec{U}_T + \frac{dS(t)}{dt}\frac{d\vec{U}_T}{dt}$$

للحصول على العبارة الكاملة لشعاع التسارع $\vec{\gamma}(M)$ يجب حساب $\frac{d\vec{U}_T}{dt}$.

يمكن أن نكتب : $\frac{d\vec{U}_T}{dt}=\frac{d\vec{U}_T}{dS}\frac{dS}{dt}$

حساب $\frac{d\vec{U}_T}{dt}$ يتطلب استعمال مفهوم الانحناء و نصف قطر الانحناء للمسار (C) كما هو في الشكل . الجزاء العنصري ΔS من المسار يمكن أن يتطابق مع قوس عنصري من محيط دائرة مركزها (C) و نصف قطرها R .



حيث : $CM=CM'=R$ و $MM'=\Delta S=R\Delta\theta$

لدينا : $MM'=\Delta S=R\Delta\theta$ حيث $\Delta\theta$ هي الزاوية التي يحجزها هدا القوس ΔS على الدائرة التي مركزها C و نصف قطرها R .و منه يمكن ان نكتب :

$$\frac{d\vec{U}_T}{dS}=\frac{d\vec{U}_T}{R\Delta\theta}=\frac{1}{R}\frac{d\vec{U}_T}{d\theta}=\frac{1}{R}\vec{U}_N$$

$\vec{U}_N$ هو شعاع الواحدة العمودي على المسار (C) في النقطة M و الموجه نحو مركز الانحناء

و منه $$\frac{d\vec{U}_T}{dt}=\frac{dS}{dt}\cdot\frac{1}{R}\vec{U}_N$$

و يكون شعاع التسارع هو

$$\vec{\gamma}(M)=\frac{d^2S}{dt^2}\vec{U}_T+\left(\frac{dS}{dt}\right)^2\cdot\frac{1}{R}\vec{U}_N$$

$$\vec{\gamma}(M)=\ddot{S}(t)\vec{U}_T+\frac{\dot{S}^2(t)}{R}\vec{U}_N$$

$$\vec{\gamma}(M)=\frac{d\left\|\vec{V}(M)\right\|}{dt}\vec{U}_T+\frac{\left\|\vec{V}(M)\right\|^2}{R}\vec{U}_N\Leftrightarrow\vec{\gamma}(M)=\frac{dV}{dt}\vec{U}_T+\frac{V^2}{R}\vec{U}_N$$

نتائج هامة : في قاعدة الأحداثيات المنحنية (الذاتية) $\left(\vec{U}_T,\vec{U}_N\right)$, التسارع $\vec{\gamma}(M)$ هو عبارة عن مجموع مركبتين :

مركبة مماسية للمسار : $$\vec{\gamma}_T=\ddot{S}(t)\vec{U}_T=\frac{dV}{dt}\vec{U}_T$$

و مركبة ناظميه عمودية على المسار : $$\vec{\gamma}_N=\frac{V^2}{R}\vec{U}_N$$

بحيث $$\vec{\gamma}=\vec{\gamma}_T+\vec{\gamma}_N$$

ملاحظة : التسارع المماسي $\vec{\gamma}_T$ ناتج عن تغير شدة السرعة $\left\|\vec{V}\right\|$ و أما التسارع ألناظمي $\vec{\gamma}_N$ فهو ناتج عن تغير اتجاه شعاع السرعة $\vec{V}$ أي عن انحناء المسار .

$$\left\|\vec{\gamma}\right\|=\sqrt{\vec{\gamma}_T^{\,2}+\vec{\gamma}_N^{\,2}}$$

$$R=\frac{V^2}{\left\|\vec{\gamma}_N\right\|}$$

نشير إلى أن $\vec{\gamma}_N$ تكون دائما موجهة نحو مركز الانحناء (C) أي في اتجاه $\vec{U}_N$ و لكن $\vec{\gamma}_T$ يمكن أن تكون :

في اتجاه الشعاع $\vec{U}_T$ و ذلك عندما تكون الحركة متسارعة : أي $\dfrac{d\|\vec{V}(M)\|}{dt} \succ 0$

في اتجاه معاكس للشعاع $\vec{U}_T$ لما تكون الحركة متباطئة : أي $\dfrac{d\|\vec{V}(M)\|}{dt} \prec 0$

إذا اتّخذنا المسار كمعيار لتصنيف الحركات، فإنه لدينا نوعين من الحركة المستوية: حركة مستقيمة، حركة منحنية (الدائرية حالة خاصة من المنحنية).

أنواع الحركات

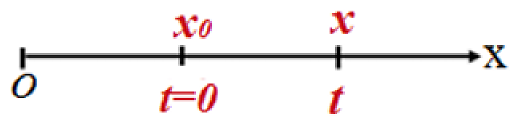
الحركات les mouvements rectilignes

تكون نقطة مادية في حركة مستقيمة منتظمة إذا كان مسارها مستقيما، و شعاع سرعتها ثابتا $\vec{V} = \overrightarrow{C^{te}}$ و منه شعاع تسارعها معدوما $\vec{a} = \vec{0}$.

المعادلة الزمنية للحركة المستقيمة المنتظمة:

بما أن المسار مستقيما فلا نحتاج سوى لمعلم يتكون من محور واحد لدراسة الحركة، و ليكن المحور (Ox) مثلا.

الشروط الابتدائية: الفاصلة الابتدائية x_0، اللحظة الابتدائية: t_0



$$\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} = \vec{V} = V\vec{\imath} = \overrightarrow{C^{te}} = C^{te}\vec{\imath}$$

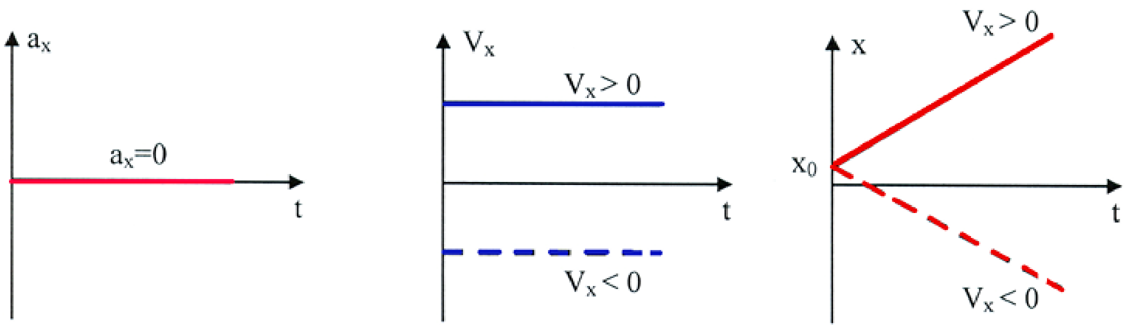
$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = V \Rightarrow dx(t) = Vdt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} Vdt \Rightarrow x - x_0 = V(t - t_0)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = V(t - t_0) + x_0$$ المعادلة الزمنية للفاصلة

$$si \;\; t_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = Vt + x_0$$

مخططات الحركة: *diagrammes du mouvement*

تتمثل في التمثيل البياني لكل من تسارع، سرعة و فاصلة النقطة المادية بدلالة الزمن.



ب) ـ حركة المستقيمة المتغيرة بانتظام $\vec{a} = \overrightarrow{cst} = \overrightarrow{a_0}$ على محوره Ox :

تكون الحركة متغيرة بانتظام إذا كان المسار مستقيما والتسارع ثابتا. ندرسها على محور واحد (OA) انطلاقا من عبارة a :

نقول عن حركة أنها مستقيمة متغيرة بانتظام، إذا كان مسارها مستقيما، و شعاع تسارعها ثابتا أي:
$\vec{a} = \overrightarrow{C^{te}}$

عبارة السرعة هي

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = a \quad \Rightarrow \quad \int_{V_0}^{V} dV = \int_{t_0}^{t} adt$$

$$\Rightarrow \quad V - V_0 = a(t - t_0) \;\Rightarrow\; V = a(t - t_0) + V_0$$

$$si \;\; t_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad V = at + V_0$$

عبارة الفاصلة هي

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{V}(t) \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = V(t) \Rightarrow dx(t) = V(t)dt$$

$$\Rightarrow dx(t) = V(t)dt$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} (a(t-t_0) + V_0)dt = a\int_{t_0}^{t} (t-t_0)dt + \int_{t_0}^{t} V_0 dt \Rightarrow$$

$$x(t) - x_0 = \frac{1}{2}[(t-t_0)^2]_{t_0}^{t} + [V_0 t]_{t_0}^{t} \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{2}(t-t_0)^2 + V_0(t-t_0) + x_0$$

$$si\ t_0 = 0 \Rightarrow \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}t^2 + V_0 t + x_0$$

جـ- الحركة المستقيمة متغيرة التسارع
:($mouvement\ rectiligne\ à\ accélération\ variable$)

تكون الحركة مستقيمة متغيرة إذا كان مسارها مستقيما، و تسارعها غير ثابت (أي يتغير بتغير الزمن $(a = f(t)$

مثال:

ينتقل جسم نقطي على مسار مستقيم بتسارع $a = t - 3$

أوجد عبارتي السرعة و الفاصلة بدلالة الزمن علما أنه عند اللحظة الابتدائية $t_0 = 0s$ فإن الفاصلة الا بتدائية هي x_0 ، السرعة الابتدائية هي V_0 ، لكن عند اللحظة $t = 2s$ فإن $x = 3m$، $.V = 2m.s^{-2}$

الحل:

$$\int_{V_0}^{V} dV = \int_{t_0=0}^{t} a dt = \int_{t_0=0}^{t} (t-3)dt \Rightarrow$$

$$V(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + V_0$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = V(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + V_0 \Rightarrow$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0=0}^{t} \left(\frac{1}{2}t^2 - 3t + V_0\right) dt \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + V_0 t + x_0$$

لدينا $V(t = 2s) = 2m/s$ إذن و بالتعويض في معادلة السرعة نجد:

$$2 - 6 + V_0 = 2 \Rightarrow V_0 = 6m/s$$

لدينا $x(t = 2s) = 3m$ إذن و بالتعويض في معادلة الفاصلة نجد:

$$x_0 = -\frac{11}{3}m$$

و منه تصبح المعادلتان الزمنيتان للسرعة و للفاصلة كالتالي:

$$V(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + 6 \quad ; \quad x(t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + -\frac{11}{3}$$

الحركة الدائرية

- المسار عبارة عن دائرة نصف قطرها R ومركزها 0 يمكن دراسة الحركة في الإحداثيات القطبية أو الذاتية.

❖ شعاع الموضع, السرعة و التسارع في الاحداثيات القطبية

شعاع الموضع

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{U}_\rho = R\vec{U}_\rho$$

شعاع السرعة

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{\boldsymbol{U}}_\theta$$

شعاع التسارع

$$\vec{\gamma} = -R\dot{\theta}^2\vec{U}_\rho + \boldsymbol{R\ddot{\theta}\vec{U}_\theta}$$

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}} = \vec{\boldsymbol{\gamma}}_\rho + \vec{\boldsymbol{\gamma}}_\theta$$

❖ شعاع الموضع , السرعة و التسارع في الاحداثيات الذاتية

$$S(t) = R\,\theta(t)$$

– شعاع السرعة :

$$\vec{V} = V\vec{U}_T = \frac{ds}{dt}\vec{U}_T = R\dot{\theta}\vec{U}_T$$

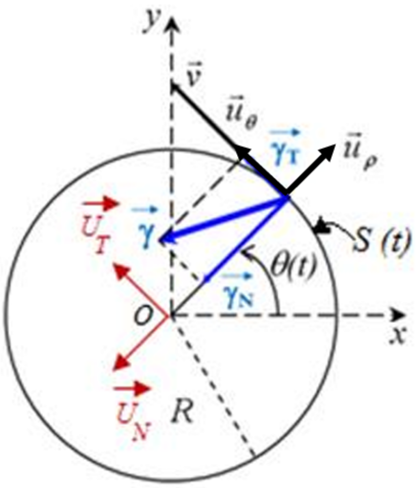
:

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\,\vec{U}_T + \frac{V^2}{R}\vec{U}_N$$

– شعاع التسارع

$$\vec{\gamma} = R\ddot{\theta}\vec{U}_T + R\dot{\theta}^2\vec{U}_N$$

$$\vec{\boldsymbol{\gamma}} = \vec{\boldsymbol{\gamma}}_T + \vec{\boldsymbol{\gamma}}_N$$



* نلاحظ من الرسم أن :

$$\vec{U}_\rho = -\vec{U}_N \quad , \quad \vec{U}_T = \vec{U}_\theta$$

$$\|\vec{U}_\rho\| = \|\vec{U}_N\| \;, \quad \|\vec{U}_T\| = \|\vec{U}_\theta\|$$

ج)- المعادلة الزمنية للحركة الدائرية المنتظمة :

الحركة الدائرية المنتظمة هي حركة مسارها دائري و سرعتها الزاوية ثابتة.

$$V = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \int_{S_0}^{S} ds = \int_{t=0}^{t} V dt \Rightarrow S - S_0 = Vt \Rightarrow S = Vt + S_0$$

بما أن : $S = R\theta$

$$S = Vt + S_0 \Rightarrow R\theta = Vt + R\theta_0 \Rightarrow \theta = \frac{V}{R} t + \theta_0$$

$$\Rightarrow \theta = \omega t + \theta_0 \Rightarrow \theta = \dot{\theta} t + \theta_0$$

لدينا :

$$S = R\theta \Rightarrow \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\boldsymbol{\omega}$$

$$V = R\omega \Rightarrow \frac{V}{R} = \boldsymbol{\omega}$$

د)- الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام :

هي حركة مسارها دائري و تسارعها الزاوي ثابت :

$$\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{dt}} = Cst = c$$

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{dt}} = \ddot{\theta} \Rightarrow d\dot{\theta} = \ddot{\theta}\, dt \rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} t + c$$

نختار كشروط ابتدائية: $t = 0,\ \dot{\theta} = \dot{\theta}_0$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_0 = \ddot{\theta}(0) + \mathrm{c}$$

$$\dot{\theta}_0 = 0 + c \Rightarrow \dot{\theta}_0 = cst = c$$

$$\dot{\theta} = \ddot{\theta} t + \dot{\theta}_0$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \dot{\theta} dt$$

الحركة المستقيمة الجيبية

يمكن الحصول على الحركة المستقيمة الجيبية باسقاط الحركة الدائرية على $x'ox$

اسقاط النقطة Mيعطي الفاصلة $x(t)$

$$x(t) = x_m \cos\ (\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

حيث :

$x(t)$: الفاصلة أو المطال اللحظي.

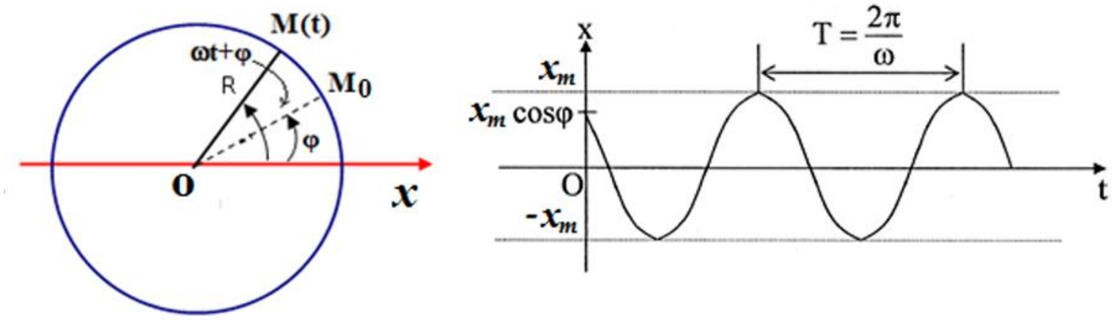
x_m : سعة الحركة أو المطال الأعظمي.

ω: نبض الحركة .

φ : الطور أو الصفحة الإبتدائية .

$(\omega t + \varphi)$الطور اللحظي أو الصفحة اللحظية.

:

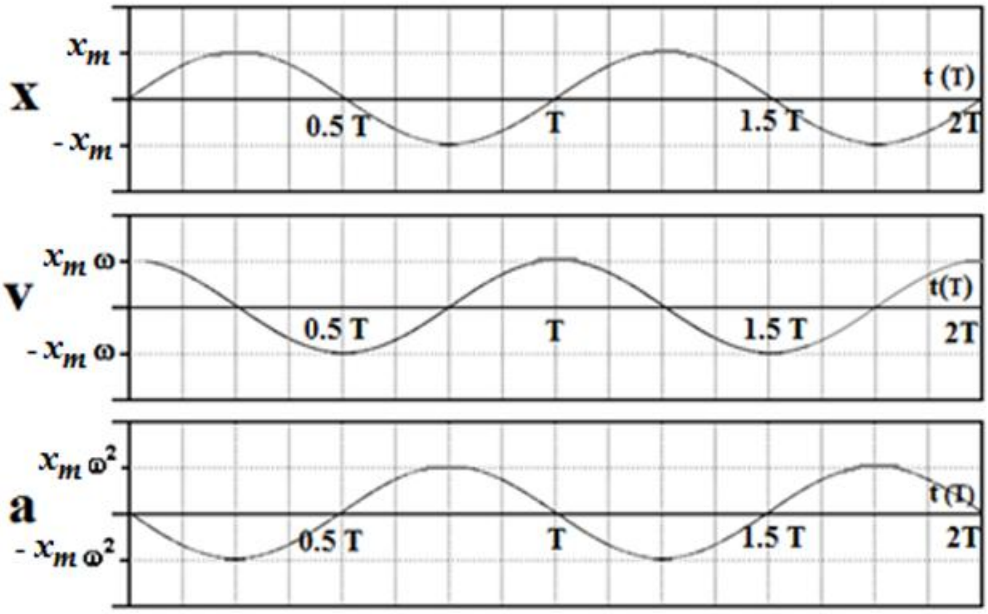


<u>أ) - السرعة</u> : نشتـــــــق المعادلة الزمنية :

$$V = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\omega\, x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

ويكون مخطط الحركة كالتالي



مخطط الحركة

في حالة ما إذا كانت الحركة الدائرية في المستوي (xoy) مثلا، نلاحظ بأن $\overrightarrow{u_\varphi} = \vec{k} \wedge \overrightarrow{u_\rho}$ و عندها يكون $\vec{V} = R\omega\,\overrightarrow{u_\varphi} = R\omega\left(\vec{k} \wedge \overrightarrow{u_\rho}\right) = \omega\vec{k} \wedge \left(R\overrightarrow{u_\rho}\right) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$

$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

في الحركة الدائرية تمثل السرعة الزاوية بالشعاع $\vec{\omega}$ حيث تكون الثلاثية $\left(\overrightarrow{OM}, \vec{V}, \vec{\omega}\right)$ مباشرة

ملاحظة:

اتجاه شعاع السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ نجده بتطبيق قاعدة اليد اليمنى أو قاعدة مفك البراغي $(Le\ tourne\ Vice)$.