1. مقدمة

نهتم في هذا الدرس بمفهوم النهاية سيما بجوانبه المرتبطة بمفهوم الاستمرار. وسوف نعتبر من حين لآخر بأن القارئ سبق له أن اطلع على بعض القضايا – ولو بقسط قليل – في دروس التحليل الرياضي المقدمة في برامج التعليم الثانوي. وفي هذا السياق فلا بد لنا من التذكير بجملة من التعاريف وتقديم بعض النظريات والنتائج المتعلقة بالاستمرار. وقبل كل ذلك فقد قدمنا تعاريف وعمليات على الدوال.

كما اهتممنا بالاستمرار المنتظم حتى وإن كان البرنامج لا يشير إلى هذا الموضوع بشكل صريح. ذلك أن هناك نتائج هامة مترتبة عنه كتلك المتعلقة بالاستمرار في المجالات المتراصة. ومن جهة أخرى يشير البرنامج إلى نظرية المجالات المتداخلة، لكننا لم نتطرق إليها هنا لأننا تناولناها في الفصل الثاني.

ومن بين النتائج الهامة المرتبطة بالاستمرار ما يعرف بنظرية (أو نظريات) النقطة الصامدة. لقد عرفت نظرية النقطة الصامدة خلال تطورها، على مرّ قرابة قرن من الزمن، العديد من الصيغ، وهو ما جعلها أداة رياضية فعالة في حل المسائل المختلفة. والظاهر أن برامجنا التعليمية في حقل الرياضيات لا تحيط هذه النظرية بالعناية التي تستحقها فخصصنا لها حيزا في باب الأعمال الموجهة.

2. عمليات على الدوال وتعاريف

نقدم في هذا المقطع بعض التعاريف المرتبطة بمفهوم الدالة (أو التابع) بشكل موجز لأن معظمها معروف لدى القارئ.

تعريف (جمع وضرب الدوال)

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$. ولتكن $f:A\to\mathbb{R}$ و $g:A\to\mathbb{R}$ دالتين. نعرّف مجموع $f+g:A\to\mathbb{R}$ وجداء الدالتين $f.g:A\to\mathbb{R}$ وجداء دالة في عدد λ $\lambda.f:A\to\mathbb{R}$ و نسبة الدالتين $\frac{f}{g}:A\to\mathbb{R}$ (في حالة عدم انعدام g) بالعلاقات :

$$\forall x\in A,\quad (f+g)(x)=f(x)+g(x),$$
$$\forall x\in A,\quad (f.g)(x)=f(x).g(x),$$
$$\forall x\in A,\quad (\lambda.f)(x)=\lambda.f(x),$$
$$\forall x\in A,\quad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

ملاحظة

مجموعة الدوال المزودة بقانونين جمع الدوال وضرب الدوال في الأعداد يجعل منها فضاء شعاعيا على $\mathbb{R}$. أما قانونا الجمع وضرب الدوال فيما بينها فيزود مجموعة الدوال ببنية حلقة تبديلية واحدية.

تعريف (تركيب الدوال)

ليكن A و B جزءين من $\mathbb{R}$ و $f:A\to B$ و $g:B\to\mathbb{R}$ دالتين.
نعرّف دالة التركيب $g\circ f:A\to\mathbb{R}$ بالعلاقة :

$$\forall x\in A,\quad (g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big).$$

تعريف (التطبيق المطابق)

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$. يسمى التطبيق $f:A\to A$ المعرف بـــ

$$\forall x\in A,\ \ f(x)=x$$

التطبيق المطابق على A. نرمز للتطبيق المطابق على A عموما بـــ I_A

تعريف (التطبيق العكسي)

ليكن A و B جزءين من $\mathbb{R}$ و $f: A \to B$. إذا كان $f: A \to B$ تقابلا يمكن تعريف الدالة العكسية $f^{-1}: B \to A$ بـ $f^{-1}(y) = x$ عندما يكون $y = f(x)$.

تعريف (الدالة المحدودة)

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$ و $f: A \to \mathbb{R}$. نقول عن الدالة f إنها محدودة إذا وجد ثابت $M > 0$ بحيث $\forall x \in A, \quad |f(x)| \leq M$.

عندما تكون f محدودة فإن المجموعة $f(A)$ المحتواة في $\mathbb{R}$ محدودة. وهي إذن تقبل حدا أدنى وحدا أعلى نرمز لهما على التوالي بـ $\inf f$ و $\sup f$.

ملاحظة

يتضح من الخاصيتين المميزتين للحدين الأدنى والأعلى أن (باعتبار $f: A \to \mathbb{R}$) :

$$m = \inf_{x \in A} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \quad m \leq f(x), \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A \ : f(a) < m + \varepsilon. \end{cases}$$

$$M = \sup_{x \in A} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \quad f(x) \leq M, \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists b \in A \ : \ M - \varepsilon < f(b). \end{cases}$$

لاحظ أن m و M لا ينتميان بالضرورة إلى $f(A)$.

مثال

- نعتبر $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = \sin x$ فنجد أن :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \sin(x) = 1 \in f(\mathbb{R}) = [0,1].$$

- نعتبر $f: \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = \sin x$ فنجد أن :

$$\inf_{x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[} \sin(x) = 0 \notin f(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[) =]0,1[,$$

$$\sup_{x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[} \sin(x) = 1 \notin f(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[) =]0,1[.$$

تعريف (الدالة الزوجية والدالة الفردية)

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$ متناظرا بالنسبة لـــ 0 و $f : A \to \mathbb{R}$.

– نقول عن الدالة f إنها زوجية إذا كان

$$\forall x \in A, \quad f(x) = f(-x).$$

– نقول عن الدالة f إنها زوجية إذا كان

$$\forall x \in A, \quad f(x) = -f(-x).$$

أمثلة

* الدالتان f و g المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـــ $f(x) = \cos x$ و $g(x) = |x|$ دالتان زوجيتان.
* الدالتان f و g المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـــ $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x^3$ دالتان فرديتان.
* الدالتان f و g المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـــ $f(x) = \sin x + \cos x$ و $g(x) = |x| + x$ دالتان غير زوجيتين وغير فرديتين.

تمرين

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$ متناظرا بالنسبة لـــ 0 و $f : A \to \mathbb{R}$.

اكتب f على شكل مجموع دالتين إحداهما زوجية والأخرى فردية.

الحل

نعرّف g و h بـــ $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ و $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ فنلاحظ أن

1) g زوجية،

2) h فردية،

3) $f = g + h$.

وهو المطلوب.

تعريف (الدالة الدورية)

ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

– نقول عن الدالة f إنها دورية إذا وجد عدد حقيقي φ غير منعدم يحقق العلاقة

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x + \varphi).$$

– يسمى φ دورة لـــ f. غالبا ما نسمي دورة f أصغر عدد (إن وجد) موجب تماما φ يحقق العلاقة السابقة

أمثلة

- الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بـ $f(x)=\cos x$ دورية ودورتها 2π.
- الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بـ $f(x)=\cos 2x$ دورية ودورتها π.
- الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بـ $f(x)=\cos 2\pi x$ دورية ودورتها 1.
- الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بـ $f(x)=\cos\frac{2\pi}{a}x$، حيث a عدد حقيقي موجب تماما، دورية ودورتها a.

ملاحظة

قد يستغرب القارئ في عبارة "إن وجد" الواردة في التعريف السابق لأنه ألف الدوال الدورية من نمط الدوال المثلثية. لتوضيح أن هناك دوال دورية ليس لها أصغر دورة نسوق المثال التالي :

$$f(x)=\begin{cases}1 & : x\in\mathbb{Q},\\ 0 & : x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

خذْ $\varphi=\frac{1}{n}$ حيث n عدد طبيعي غير منعدم وستلاحظ أن :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=f(x+\frac{1}{n}).$$

يرجع ذلك إلى قيام الخاصية التالية :

$$x\in\mathbb{Q}\Rightarrow x+\frac{1}{n}\in\mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow\ f(x)=f(x+\frac{1}{n})=1,$$

$$x\notin\mathbb{Q}\Rightarrow x+\frac{1}{n}\notin\mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow\ f(x)=f(x+\frac{1}{n})=0.$$

ومن ثمّ نلاحظ أن كل عدد من الشكل $\frac{1}{n}$ (حيث n عدد طبيعي) هو دورة للدالة. ما هي أصغر دورة؟ لاحظ أن $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}=0$، وهو يبرر وجود عبارة "إن وجد" الواردة في التعريف السابق.

تعريف (دالة رتيبة)

لتكن دالة $f:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.
* نقول إن f متزايدة تماما إذا كان $f(x)<f(y)$ كلما كان $x<y$

* نقول إن f متناقصة تماما إذا كان $f(x)<f(y)$ كلما كان $x>y$
* نقول عن f إنها رتيبة إن كانت متزايدة أو متناقصة.

إذا استبدلنا فيما سبق > و < على التوالي بـــ $\leq$ و $\geq$ فإنه ينبغي حذف لفظ "تماما".

مثال

- الدالة $f:\mathbb{R}^{+}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بـــ $f(x)=x^{2}$ متزايدة تماما.
- الدالة $g:\mathbb{R}^{-}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بـــ $g(x)=x^{2}$ متناقصة تماما.
- الدالة $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بـــ $h(x)=x^{2}$ ليست رتيبة.

تمرين

لتكن دالة $f:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ متزايدة تماما (متناقصة تماما، على الترتيب) حيث I مجال.

أثبت أن :

1) $f:I\longrightarrow f(I)$ تقابلا.

2) $f^{-1}:f(I)\longrightarrow I$ متزايدة تماما (متناقصة تماما، على الترتيب).

تعريف (الاقتصار والتمديد)

ليكن A و B جزءين من $\mathbb{R}$ بحيث $B\subset A$ و $f:A\rightarrow\mathbb{R}$ و $g:B\rightarrow\mathbb{R}$.

نقول عن الدالة f إنها **امتداد** (أو تمديد) للدالة g إذا كان :

$$\forall x\in B,\ f(x)=g(x).$$

وفي هذه الحالة تسمى الدالة g **اقتصارا** للدالة f. نعبّر عن ذلك عموما بالرمز $g=f_{|B}$.

3. النهايات

نقدم في هذا المقطع تعاريف أساسية وبعض القضايا الخاصة بالنهايات دون كثير من التركيز. وسنؤجل بعض التعاليق والملاحظات التي كان بالإمكان إدراجها هنا إلى المقطع اللاحق الخاص بمفهوم الاستمرار.

تعريف (النهاية)

لتكن $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة a. نقول عن f إنها تملك نهاية منتهية c عند النقطة a إذا تحقق الشرط : $\lim_{x\to a} f(x) = c$، أي إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 :\ |x-a| < \alpha \ \Rightarrow\ |f(x)-c| < \varepsilon .$$

ملاحظة

من حق α، في التعريف السابق، أن يتعلق بـــ ε و a. وكما ذكرنا في حالة المتتاليات المتقاربة فإن إثبات أن $\lim_{x\to a} f(x) = c$ باستخدام التعريف يتمثل في تحديد α بدلالة ε و a.

مثال

لإثبات أن $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ باستخدام التعريف نلاحظ بعد اختيار ε كيفيا أنه يكفي أن نكتب

$$\begin{aligned} |x^2-9| &\le |x+3||x-3| \\ &< \alpha|x+3| \\ &< 7\alpha \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

وذلك باعتبار أن x مجاورا لـــ 3، وبالتالي فهو لن يكون مثلا أكبر من 4. وهكذا يتضح أنه يكفي اختيار $\alpha < \frac{\varepsilon}{7}$ للحصول على صحة

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 :\ |x-3| < \alpha \ \Rightarrow\ |x^2-9| < \varepsilon .$$

إن التعريف الموالي يكافئ السابق.

تعريف (النهاية مرة أخرى)

لتكن $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة a. نقول عن f إنها تملك نهاية منتهية c عند النقطة a إذا تحقق الشرط :
من أجل كل مجال C مركزه c يوجد مجال A مركزه a بحيث $f(A \cap I) \subset C$.

نظرية (النهاية و المتتاليات)

لتكن $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة a. تكون للدالة f نهاية منتهية c عند النقطة a إذا وفقط إذا كان : مهما كانت المتتالية (x_n) من I المتقاربة نحو a فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = c$.

البرهان

أولا : نفرض أن للدالة f نهاية منتهية c عند النقطة a. ولتكن متتالية (x_n) من I متقاربة نحو a، أي أن :

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0 : \ \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0 \ \Rightarrow \ |x_n - a| < \varepsilon .$$

نكتب الآن أن للدالة f نهاية منتهية c عند النقطة a :

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \ |x - a| < \alpha \ \Rightarrow \ |f(x) - c| < \varepsilon .$$

نعتبر بعد ذلك $\varepsilon > 0$. نختار $\alpha > 0$ تحقق (2) ونختار العدد ε في (1) بحيث: $\varepsilon = \alpha$. ومن ثم يأتي وجود n_0 بحيث تتحقق (1)، أي

$$(3) \quad \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0 \ \Rightarrow \ |x_n - a| < \alpha .$$

بالرجوع إلى (2) وبالاستناد إلى (3) يتضح أن

$$\begin{aligned} \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0 \ &\Rightarrow \ |x_n - a| < \alpha \\ &\Rightarrow \ |f(x_n) - c| < \varepsilon. \end{aligned}$$

وبالتالي $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = c$.

ثانيا : نفرض أنه مهما كانت المتتالية (x_n) من I المتقاربة نحو a فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = c$، وأن $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq c$. نعبّر عن العلاقة الأخيرة بـ

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \ \forall \alpha > 0, \ \exists x \in I : |x - a| < \alpha \ \wedge \ |f(x) - c| \geq \varepsilon_0 .$$

لنختر $\alpha = \frac{1}{n}$ حيث n عدد طبيعي غير منعدم. يوجد عنصر x_n من I يحقق

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \ \wedge \ |f(x_n) - c| \geq \varepsilon_0 .$$

وبذلك ننشئ متتالية (x_n) تتقارب نحو a (بفضل العلاقة $|x_n - a| < \frac{1}{n}$) لكنها لا تحقق العلاقة $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = c$ (بسبب $|f(x_n) - c| \geq \varepsilon_0$). هذا التناقض يؤدي إلى أن فرضنا $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq c$ خاطئ.

ولذا $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$. وهو المطلوب.

نظرية (وحدانية النهاية)

لتكن $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة a. إذا قبلت الدالة f نهاية فهي وحيدة.

البرهان

افرض أن f الدالة تقبل نهايتين $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c'$. ولتكن (x_n) متتالية متقاربة نحو a. يتضح من النظرية السابقة أن $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = c$ (بفضل $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$) وأن $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = c'$ (بفضل $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c'$). واعتمادا على وحدانية نهاية المتتالية $\left(f(x_n)\right)_n$ تأتي المساواة $c = c'$.

ملاحظة

نتحدث عن النهاية من اليمين إذا استبدلنا في ما سبق الكتابة $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ بالكتابة $\lim\limits_{x \xrightarrow{x>a} a} f(x)$ (أي أن x يقترب من a من جهة اليمين على المحور الحقيقي)، ونتحدث عن النهاية من اليسار إذا استبدلنا الكتابة $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ بالكتابة $\lim\limits_{x \xrightarrow{x<a} a} f(x)$ (أي أن x يقترب من a من جهة اليسار على المحور الحقيقي).

تعريف

لتكن $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة a. نقول عن f إنها تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى a (ونكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$) إذا تحقق الشرط :

$$\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0 : \ |x - a| < \alpha \ \Rightarrow f(x) > A .$$

ونقول عن f إنها تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول x إلى a (ونكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$) إذا تحقق الشرط :

$$\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0 : \ |x - a| < \alpha \ \Rightarrow f(x) < -A .$$

4. أبرز خواص النهايات

1. نهاية مجموع دالتين $f+g$: من السهل التأكد من صحة ما ورد في الجدول التالي الذي يوضح قيمة $\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$ بدلالة قيم النهايتين $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$:

$\lim_{x\to a} f(x) = \rightarrow$ $\lim_{x\to a} g(x) =\downarrow$	c	$+\infty$	$-\infty$
c'	$c+c'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$?$
$-\infty$	$-\infty$	$?$	$-\infty$

مثال

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2+1}{x^4+3}+\frac{2x^2}{x+3}\right)=\frac{10}{84}+\frac{18}{6}=\frac{5}{42}+3$$.

2. نهاية جداء دالتين $f\times g$: من السهل التأكد من صحة ما ورد في الجدول التالي الذي يوضح قيمة $\lim_{x\to a} f(x)\times g(x)$ بدلالة قيم النهايتين $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$:

$\lim_{x\to a} f(x) = \rightarrow$ $\lim_{x\to a} g(x) =\downarrow$	$c>0$	$c<0$	$c=0$	$+\infty$	$-\infty$
$c'>0$	$c\times c'$	$c\times c'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$c'<0$	$c\times c'$	$c\times c'$	0	$-\infty$	$+\infty$
$c'=0$	0	0	0	$?$	$?$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$?$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$?$	$-\infty$	$+\infty$

مثال

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+1}{x^4+3}\times\frac{2x^2}{x+3}=\frac{10}{84}\times\frac{18}{6}=\frac{5}{14}$ ، $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(x^2-5)\times\sin x=\frac{\pi}{2}-5$.

3 . نهاية جداء دالة وعدد $\lambda.f$: من السهل التأكد من صحة ما ورد في الجدول التالي الذي يوضح قيمة $\lim\limits_{x\to a}\lambda.f(x)$ بدلالة قيم النهاية $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ و العدد λ :

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ \rightarrow$ / $\lambda=_{\downarrow}$	c	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda>0$	$\lambda\times c$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda<0$	$\lambda\times c$	$-\infty$	$+\infty$

مثال

$\lim\limits_{x\to 3}2(x^2-5)=8$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}-2(x^2-5)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}2(x^3-5)=-\infty$.

4 . نهاية مقلوب دالة $\frac{1}{f}$: من السهل التأكد من صحة ما ورد في الجدول التالي الذي يوضح قيمة $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}$ بدلالة قيم النهاية $\lim\limits_{x\to a}f(x)$:

$\lim\limits_{x\to a}f(x)$	$c\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{c}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

مثال

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{x^3}+1}=+\infty$.

5. حالات عدم تعيين : هناك في حساب النهايات حالات لا نتمكّن فيها من تحديد النهاية إلا بالمزيد من التحري كالحالات الموالية المسماة حالات عدن تعيين :

* **الحالة** $0\times\infty$

مثل ذلك : حساب $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\times\frac{1}{|x|}\right)$. عندما نكتب $\lim\limits_{x\to 0}x^2\times\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=0\times(+\infty)$ فإننا لا نستطيع البت، لكننا نستطيع رفع عدم التعيين وحساب $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\times\frac{1}{|x|}\right)$ كما يلي : $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\times\frac{1}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$.

مثال آخر : حساب $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\times\frac{1}{2x^2}\right)$. عندما نكتب $\lim\limits_{x\to 0}x^2\times\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x^2}=0\times(+\infty)$ فإننا لا نستطيع البت، ورغم ذلك نستطيع كتابة $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\times\frac{1}{2x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

لاحظ اختلاف النهايتين في المثالين السابقين، ولذا فالحالة $0\times\infty$ هي حالة عدم تعيين.

* **الحالة** $\frac{\infty}{\infty}$

مثل ذلك : حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}$. لا نستطيع البت عند نكتب $\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2}{\lim\limits_{x\to+\infty}x^3}=\frac{+\infty}{+\infty}$ ، لكننا نستطيع رفع عدم التعيين وحساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}$ كما يلي : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

مثال آخر : حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}$. عندما نكتب $\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2+1}{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2}=\frac{+\infty}{+\infty}$ فإننا لا نستطيع البت، لكننا نستطيع رفع عدم التعيين وحساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}$ كما يلي : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\frac{1}{x^2}\right)=3+0=3$.

لاحظ اختلاف النهايتين في المثالين السابقين، ولذا فالحالة $\frac{\infty}{\infty}$ هي حالة عدم تعيين.

* **الحالة** $\frac{0}{0}$

مثال ذلك : حساب $\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2}$. عندما نكتب $\frac{\lim_{x\to 0} 4x^2}{\lim_{x\to 0} x^2}=\frac{0}{0}$ فإننا لا نستطيع البت، لكننا نستطيع رفع عدم التعيين وحساب $\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2}$ كما يلي : $\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0} 4=4$.

مثال آخر : حساب $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{5x^2}$. عندما نكتب $\frac{\lim_{x\to 0} x^2}{\lim_{x\to 0} 5x^2}=\frac{0}{0}$ فإننا لا نستطيع البت، لكننا نستطيع رفع عدم التعيين وحساب $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{5x^2}$ كما يلي : $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$.

لاحظ اختلاف النهايتين في المثالين السابقين، ولذا فالحالة $\frac{0}{0}$ هي حالة عدم تعيين.

* **حالة** $\infty-\infty$

مثال ذلك : حساب $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-2x^2\right)$. عندما نكتب $\lim_{x\to+\infty} x^2-\lim_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty-(+\infty)$ فإننا لا نستطيع البت، لكننا نستطيع رفع عدم التعيين وحساب $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-2x^2\right)$ كما يلي : $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-2x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}(-x^2)=-\infty$.

مثال آخر : حساب $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-x^2\right)$. عندما نكتب $\lim_{x\to+\infty} x^2-\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty-(+\infty)$ فإننا لا نستطيع البت، لكننا نستطيع رفع عدم التعيين وحساب $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-x^2\right)$ كما يلي : $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-2x^2\right)=\lim_{x\to+\infty} 0=0$.

لاحظ اختلاف النهايتين في المثالين السابقين، ولذا فالحالة $\infty-\infty$ هي حالة عدم تعيين.

5. الاستمرار

ما معنى استمرار (أو اتصال) دالة ؟ نستطيع أن نقرّب فكرة الاستمرار بالقول إننا نتحدث في اللغة العامة عن استمرار وضعية إذا تواصلت دون حدوث انقطاعات مفاجئة في مسيرتها. وبنفس المنظور نقول عن دالة "$y = f(x)$" إنها مستمرة إن كان أي تغيّر طفيف يطرأ على المتغير x يواكبه سلوك مماثل – أي تغير طفيف– لـــ y. كيف نعبّر بالدقة الرياضية اللازمة عن هذا المفهوم؟

تعريف (استمرار دالة)

> لتكن $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة a. نقول عن f إنها مستمرة عند a إذا تحقق الشرطان :
>
> 1. النهاية $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ موجودة (في $\mathbb{R}$).
> 2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

ملاحظات

1) إذا استبدلنا في التعريف السابق العلاقة $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ بالعلاقة $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} a} f(x) = f(a)$ نقول إن f مستمر من اليمين عند a. وإذا استبدلنا تلك العلاقة بالعلاقة $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} a} f(x) = f(a)$ نقول إن f مستمر من اليسار عند a.

2) نعبّر عن هذا التعريف رمزيا (يسميه البعض التعريف بـــ $\varepsilon - \delta$ أو $\varepsilon - \alpha$) بطريقة كوشي (1789–1857)–شفارتز (1843–1921) Cauchy-Schwarz بـــ :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 : |x - a| < \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon\ .$$

ونعرّف الاستمرار على المجال I إن كانت الدالة مستمرة عند كل نقطة من I. ونعرّف الاستمرار من جهة واحدة (من اليمين أو من اليسار) بتقييد مآل x نحو a بالقيد $x > a$ أو $x < a$. وبطبيعة الحال فإن الاستمرار عند نقطة يعني أن هناك استمرارا من جهتي تلك النقطة.

3) **كيف نفسّر العلاقة** $\varepsilon - \alpha$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 : |x - a| < \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

التي تعبر عن استمرار f عند a؟

لاحـــظ أولا أن $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ تعنـــي أن $f(x)$ تنتمـــي إلـــى مجـــال مركـــزه $f(a)$، وهـــو $]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[$. كما أن $|x-a|<\alpha$ تعني أن x ينتمي إلى مجال مركزه a، وهــو $]a-\alpha, a+\alpha[$.
وبالتالي فالعلاقة المعبِّرة عن الاستمرار تقول:

مهما كان **المجال الذي مركزه** $f(a)$ فإنه يوجد **مجال مركزه** a **صورته محتواة في المجال الذي مركزه** $f(a)$.

وهذا يعني :

الصورة العكسية لأي مجال مركزه $f(a)$ **تحتوي مجالا مركزه** a .

وما دمنا نعرف جوار نقطة على أنه مجموعة تحتوي مجالا مركزه تلك النقطة فإننا نستطيع القول بأن :

استمرار f **عند** a يعني **الصورة العكسية لكل جوار لــ** $f(a)$ **هو جوار لــ** a .

ملاحظة

من المهم أن يكون المجال I مفتوحا في التعريف السابق. وإن لم يكن الأمر كذلك. فلا بد أن نضيف في التعريف شرطا يقول إن النقطة a تنتمي إلى مجال مفتوح محتوى في I . وبـــدون ذلـــك فـــإن الكتابـــة $x \longrightarrow a$ الظاهرة تحت الرمز lim في الشرطين الواردين في التعريف قد تؤدي إلى تناقض. ويتمثـــل هـــذا التناقض في عدم ضمان مكوث قيم x في مجموعة تعريف f عندما يقترب x من a . وكيف يجوز لنا فـــي هذه الحالة كتابة $f(x)$!!؟

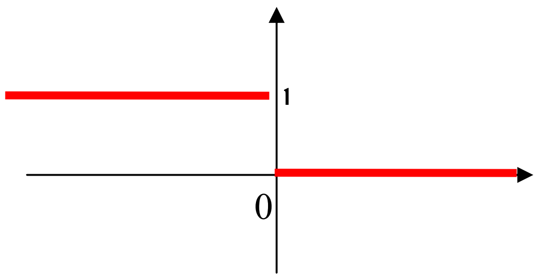
وعلى الرغم من الطابع المنطقي والحدسي لمفهوم النهاية والاستمرار فإن التجربة تثبت بأنـــه مفهـــوم صعب الإدراك بالنسبة للطلبة كما أن التجربة التي عرفتها الرياضيات قبل عهد كوشي-شفارتز تؤكد ذلـــك إذ ظل الرياضيون عدة قرون ينظّرون قبل أن يهتدوا إلى ما وصلنا إليه الآن بخصوص هذا المفهوم.

لعل البعض يعتبر أن كل الدوال مستمرة (مثل دوال كثيرات الحدود ودالة الجيب وجيب التمام المثلثيتين والدالة اللوغاريتمية والدالة الأسية، ...) وإن وجدنا بعضا منها غير مستمرة فعدم استمرارها لا يحدث إلا في نقاط معدودات أو في مجموعة قابلة للعد. إليك بعض الأمثلة في هذا السياق :

مثال 1

الدالة المعرفة كالتالي مستمرة في كل مكان سوى في النقطة 0:

$$f(x)=\begin{cases}0 & : x>0\\ 1 & : x\le 0.\end{cases}$$



بيان الدالة

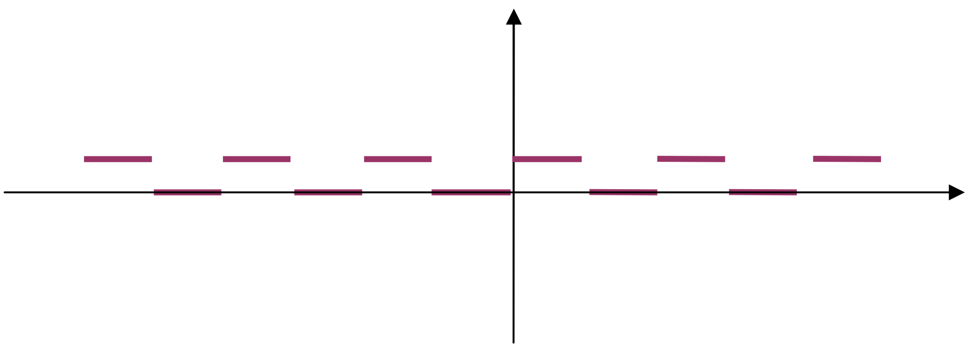
مثال 2

تصور الآن أننا نعيد النظر في المثال السابق ونكرر ما حدث في 0 عند كل قيمة لـ x تساوي عددا صحيحا، أي أننا نعتبر الدالة المعرفة مثلا كما يلي (حيث يشير n لعنصر كيفي من مجموعة الأعداد الصحيحة):

$$g(x)=1 \quad \text{من أجل} \quad x\in[2n,2n+1[$$

$$g(x)=0 \quad \text{من أجل} \quad x\in[2n+1,2n+2[$$

إنها دالة غير مستمرة عند عدد غير منته من النقاط. مجموعة هذه النقاط هي مجموعة الأعداد الصحيحة.



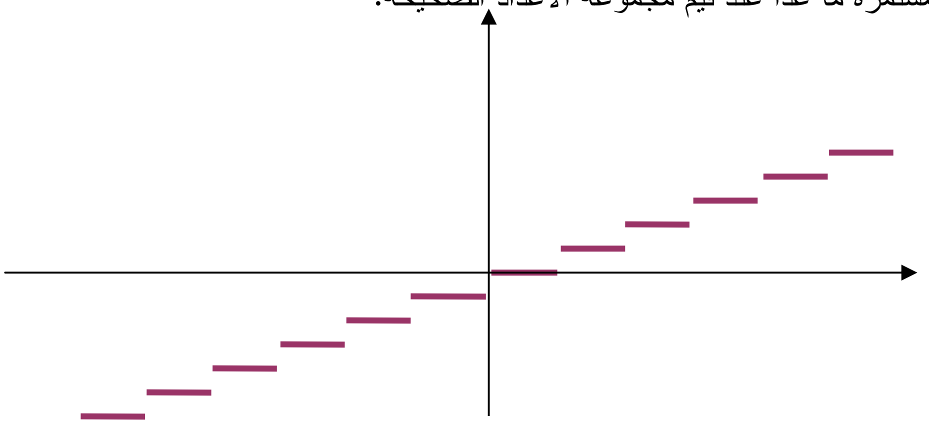
بيان الدالة

مثال 3

يمكن أيضا التفكير في الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي حيث يشير $[x]$ إلى الجزء الصحيح لـــ x :

$$u(x) = [x]$$

إن الدالة u مستمرة ما عدا عند قيم مجموعة الأعداد الصحيحة.



بيان الدالة u

مثال 4

نطرح السؤال التالي : هل توجد دالة ليست مستمرة في أية نقطة على $\mathbb{R}$؟ هذا السؤال ليس وليد اليوم ولذا بحث فيه أسلافنا واهتدوا إلى إنشاء دالة من هذا القبيل. خذ مثلا الدالة التالية حيث يرمز $\mathbb{Q}$ لمجموعة الأعداد الناطقة :

$$v(x) = \begin{cases} 0 & : \ x \in \mathbb{Q} \\ 1 & : \ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

لاحظ أنها دالة لا يمكن رسم بيانها وهي غير مستمرة عند كل نقطة من $\mathbb{R}$.

ملاحظة

كان قد طرح السؤال التالي بعد أن تم تحديد مفهوم الاشتقاق : هل توجد دالة مستمرة في كل مكان ولا تقبل الاشتقاق في أية نقطة على $\mathbb{R}$؟ الجواب : نعم، وذلك حال الدالة المعروفة بدالة فان ديرفاردن Van der Waerden (1903-1996). وهي دالة نحصل عليها على شكل نهاية متتالية (بل مجموع سلسلة) يتجاوز عرضها مستوى هذا الفصل.

النظرية التالية، التي نترك برهانها كبحث للقارئ، بالغة الأهمية في التحليل لأن استخدامها كثيف جدا في مختلف البراهين.

نظرية (استمرار تركيب الدوال)

ليكن A و B جزءين من $\mathbb{R}$ و $f:A\to B$ و $g:B\to\mathbb{R}$ دالتين و a نقطة من A.
نفرض قيام الشرطين :
1) f مستمر عند a،
2) g مستمر عند $f(a)$.
عندئذ تكون الدالة $g\circ f:A\to\mathbb{R}$ مستمرة عند a.

6. الاستمرار المنتظم

نتناول فيما يلي مفهوم الاستمرار المنتظم الذي يؤدي دورا هاما في قيام العديد من النتائج البارزة في التحليل الرياضي، والتي سنقدم البعض منها.

تعريف (الاستمرار المنتظم)

لتكن $f:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال I. نقول عن f إنها مستمرة بانتظام على مجال I على مجال I إذا تحقق الشرط :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0:\forall x,\forall y\in I,|x-y|<\alpha\ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon\ .$$

ملاحظة

لاحظ أن الاستمرار المنتظم يتعلق بمجال التعريف بأكمله وليس بنقطة منه. ما الفرق بين استمرار دالة على مجال واستمرارها المنتظم على نفس المجال؟ الفرق يتعلق بالعدد الموجب α : فإذا استطعنا إثبات بأن هذا العدد لا يتغير بتغير النقطة التي ندرس فيها الاستمرار فإن الاستمرار منتظم. أما إذا برهنا بأنه لا يمكن اختيار نفس العدد α لجميع نقاط المجال I بعد اختيارنا لـ ε فإن الاستمرار غير منتظم.

مثال 1

الدالة الجيبية $f(x)=\sin x$ المعرفة على $\mathbb{R}$. نذكر بالعلاقة المثلثية المحققة من أجل كل عددين حقيقيين x و y : $\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

ومنها نستنتج :

$$\begin{aligned}|\sin x-\sin y| &= 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|.\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|\\ &\leq 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\\ &\leq |x-y|.\end{aligned}$$

ومن ثم يتضح أن تطبيق التعريف السابق على الدالة الجيبية يتحقق بمجرد اختيار α مساويا لـــ ε. وهذا يعني أن α مستقل عن النقاط التي يمكن أن ندرس عند ا الاستمرار. وبالتالي فالدالة الجيبية مستمرة بانتظام.

مثال 2

نعتبر دالة f تحقق الخاصية التالية المسماة شرط ليبشيتز Lipschitz (1832−1903): يوجد ثابت K موجب تماما بحيث من أجل كل عنصرين x و y ينتميان إلى مجموعة تعريف f فإن $|f(x)-f(y)|\leq K|x-y|$.

تسمى دالة تحقق هذا الشرط دالة ليبشيتزية.

نلاحظ أن كل دالة ليبشيتزية دالة مستمرة بانتظام إذ يكفي اختيار (في تعريف الاستمرار المنتظم) $\alpha=\dfrac{\varepsilon}{K}$.

عندما يكون الثابت K ينتمي إلى المجال $]0,1[$ نقول إن f تقليص. سوف نعود إلى هذا التعريف لاحقا.

مثال 3

الدالة g المعرفة على $]0,1]$ بـ $g(x)=\dfrac{1}{x}$. ليكن n عددا طبيعيا غير منعدم. نضع $x=\dfrac{2}{n}$ و $y=\dfrac{1}{n}$ ونلاحظ أن x و y ينتميان إلى $]0,1]$ من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم. ثم نحسب

$$|x-y|=\frac{1}{n}$$

$$|g(x)-g(y)|=\frac{n}{2}.$$

ومن ثمّ يتبّن عندما نجعل n يؤول إلى $+\infty$ أن $|x-y|$ يؤول إلى 0 بينما يؤول $|g(x)-g(y)|$ إلى $+\infty$. وهذا يتنافى مع الاستمرار المنتظم الذي يتطلب قيام الاستلزام :

$$|x-y|\longrightarrow 0 \;\Rightarrow\; |g(x)-g(y)|\longrightarrow 0.$$

وبالتالي فإن g غير مستمر بانتظام على المجال $]0,1]$ رغم أنه مستمر على نفس المجال.

لاحظ أن إثباتنا عدم انتظام استمرار g كان يركّز على النقطة 0 وجوارها لأننا جعلنا n يؤول إلى $+\infty$ وهذا يعني أن x و y يؤولان إلى 0. ولذا نستطيع القول إن عدم انتظام الاستمرار ناتج من الطرف 0 من مجال التعريف $]0,1]$. ومما يؤكد ذلك النظرية التالية :

نظرية (نظرية هاين Heine)

كل دالة $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ مستمرة على مجال $I=[a,b]$ متراص (أي مغلق ومحدود) دالة مستمرة بانتظام على I.

البرهان (بالخلف)

نفترض أن f مستمرة وغير مستمرة بانتظام $[a,b]$. عندئذ يبيّن نفي انتظام الاستمرار وجود $\varepsilon > 0$ ومتتاليتين x_n و y_n بحيث

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon .$$

يتضح من العلاقة

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$$

أن المتتاليتين x_n و y_n محدودتان. وبالتالي نستطيع تطبيق نظرية بولزانو (1781−1848)−فايرستراش (1815−1897) Bolzano-Weierstrass (القائلة إن كل متتالية حقيقية محدودة تقبل متتالية جزئية متقاربة على x_n واستخراج متتالية جزئية x_{n_i} متقاربة. نرمز لنهايتها بـ l. ولما كان

$$\forall i \in \mathbb{N}^*: \quad |x_{n_i} - y_{n_i}| < \frac{1}{n_i}$$

فإن $\lim\limits_{i \longrightarrow +\infty} (x_{n_i} - y_{n_i}) = 0$. وهكذا يأتي أن y_{n_i} متقاربة أيضا ونهايتها تساوي l.

وبالرجوع إلى العلاقة

$$\forall i \in \mathbb{N}^*: \quad |f(x_{n_i}) - f(y_{n_i})| \geq \varepsilon$$

وجعل i يؤول إلى $+\infty$ في المتباينة $|f(x_{n_i}) - f(y_{n_i})| \geq \varepsilon$ نصل بفضل استمرار f إلى التناقض $0 = |f(l) - f(l)| \geq \varepsilon > 0$.

أين نحتاج إلى استمرار f؟ نحتاجه عندما نقول بأن استمرار f عند l المنتمي إلى المجال $[a,b]$ (وضّح لماذا؟) يؤدي إلى $\lim\limits_{x_{n_i} \longrightarrow l} f(x_{n_i}) = f(l)$ و $\lim\limits_{y_{n_i} \longrightarrow l} f(y_{n_i}) = f(l)$.

نظرية (الاستمرار وإدراك الحدين)

كل دالة f مستمرة على متراص $[a,b]$ دالة محدودة وتدرك حديها الأعلى والأدنى.

البرهان

1) نفرض أن f غير محدودة من الأعلى ومستمرة على $[a,b]$. لاحظ أنها مستمرة بانتظام حسب النظرية السابقة. من أجل كل عدد طبيعي n يوجد عنصر x_n من $[a,b]$ بحيث $|f(x_n)|>n$. ولما كانت المتتالية x_n محدودة (بحكم انتمائها إلى مجال محدود) فإننا نستطيع أن نستخرج منها متتالية جزئية x_{n_k} متقاربة ونهايتها x تنتمي إلى $[a,b]$ لأن $a\le x_{n_k}\le b$. ومن ثم نحصل على تناقض يتمثّل في : من جهة لدينا

$$\lim_{n_k\longrightarrow+\infty} f(x_{n_k})=f(x)<+\infty .$$

ومن جهة أخرى تؤدي العلاقة $|f(x_{n_k})|>n_k$ إلى

$$\lim_{n_k\longrightarrow+\infty} f(x_{n_k})=+\infty .$$

وبالتالي فالدالة f محدودة من الأعلى.

* البرهان على أن f محدودة من الأدنى شبيه بالبرهان على المحدودية من الأعلى. قدّم تفاصيل البرهان على المحدودية من الأدنى.

2) نواصل البرهان بالتأكد الآن من أن الدالة f المستمرة على $[a,b]$ تدرك حدها الأعلى، أي أنه توجد نقطة ξ من $[a,b]$ بحيث $f(\xi)=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

نقدم برهانا بالخلف : نعلم مما سبق أن $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ موجود في IR. لنضع $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)=s$ ولنفرض أن

$$\forall x\in[a,b]:\quad f(x)<s .$$

نلاحظ أن الدالة u المعرفة على $[a,b]$ بـ

$$u(x)=\frac{1}{s-f(x)}$$

دالة مستمرة على $[a,b]$. ومن ثمّ فهي مستمرة بانتظام ومحدودة على $[a,b]$. نضع $\sup\limits_{x\in[a,b]} u(x)=t$. من المؤكد أن

$$\forall x\in[a,b]:\quad u(x)=\frac{1}{s-f(x)}>0 .$$

وعليه $t > 0$ و

$$\forall x \in [a,b]: \quad 0 < u(x) \leq t .$$

ومنه ينتج

$$\forall x \in [a,b]: \quad f(\mathrm{x}) \leq s - \frac{1}{t} < s .$$

وهذا يتنافى مع القول إن $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = s$. هذا التناقض ناجم من افتراضنا $\forall x \in [a,b]: \quad f(x) < s$
الذي يعني أنه لا وجود لنقطة ξ من $[a,b]$ بحيث $f(\xi) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. إذن فإن f يدرك حده الأعلى.

* قدّم تفاصيل إدراك f لحده الأدنى.

ملاحظة

لاحظ أن محدودية المجال مهمة في هذه النظرية. للتأكد من ذلك خذ مثلا إحدى الدالتين : دالة الظل على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ أو الدالة g المعرفة على $]0,1]$ بـ $g(x) = \frac{1}{x}$.

لاحظ أيضا أن غلق المجال مهم في النظرية السابقة. للتأكد من ذلك اعتبر كمثال الدالة g أو الدالة h المعرفة على المجال $[1,2004[$ بـ $h(x) = x$ فهي لا تدرك حدها الأعلى في المجال المعتبر.

من النظريات المهمة أيضا في موضوع الدوال المستمرة النتيجة التالية التي برهن عليها لأول مرة خلال الربع الأول من القرن التاسع عشر التشيكي بولزانو والفرنسي كوشي. تقول هذه النظرية – بتعبير بسيط – إننا لا نستطيع المرور من ضفة إلى أخرى عبر نهر بدون قفز ودون أن تبتلّ أقدامنا. ونعبّر عن ذلك رياضيا بالقول : إذا أخذت دالة مستمرة لمتغير واحد إشارتين مختلفتين عند قيمتين a و b فإن هذه الدالة تنعدم، على الأقل مرة واحدة، بين a و b. وهو ما يقول النص المألوف التالي :

نظرية (القيمة الوسطى)

لتكن f دالة مستمرة على مجال متراص $[a,b]$. إن كان $f(a).f(b) < 0$ فإنه توجد نقطة c من $[a,b]$ بحيث $f(c) = 0$.

البرهان

لنفرض مثلا بأن $f(a)>0$ (ومنه سيكون $f(b)<0$). ولنضع $X=\{x\in[a,b]:f(x)>0\}$ و $c=\sup X$. ولنبيّن أن $f(c)=0$.

من الواضح أن $a<c<b$. فلو كان $f(c)\neq 0$ لوجد مجال مركزه c تحتفظ فيه f بإشارتها الموجبة، وذلك بفضل استمرار f (وضّح ذلك). وهذا يناقض القول $c=\sup X$ الذي يعرف النقطة c.

وبالتالي $f(c)=0$.

نستنتج من ذلك هذا التعميم :

نظرية (نظرية النقطة المتوسطة)

لتكن $f:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة مستمرة على مجال كيفي I. ولتكن $f(x_1)$ و $f(x_2)$ قيمتين لـ f حيث $x_1<x_2$. عندئذ من أجل كل عنصر c محصور بين $f(x_1)$ و $f(x_2)$ يوجد عنصر x_0 من المجال $]x_1,x_2[$ يحقق $f(x_0)=c$.

ملاحظة

ينتج من ذلك أن صورة مجال عبر دالة مستمرة هي أيضا مجال. كما ينتج من هذه النظرية والتي سبقتها في حالة تراص المجال $[a,b]$ أن صورة هذا المجال هي المجال $\left[\sup_{x\in[a,b]} f(x), \inf_{x\in[a,b]} f(x)\right]$.

نظرية (الاستمرار والتباين والرتابة)

لتكن $f:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة مستمرة ومتباينة على مجال كيفي I. عندئذ تكون f رتيبة تماما.

البرهان

لتكن a و b نقطتين مثبتتين في I بحيث $a<b$. نفرض مثلا أن $f(a)<f(b)$. لاحظ أنه لا يمكن أن يكون $f(x)<f(a)$ أو $f(x)>f(b)$ عندما يكون $x\in]a,b[$. فلو كان مثلا $f(x)<f(a)<f(b)$ لاستنتجنا من نظرية القيم المتوسطة وجود نقطة $y\in]x,b[$ بحيث $f(y)=f(a)$، وهذا يتنافى مع فرض تباين f. وبالتالي فإن (بعد افتراض $f(a)<f(b)$) :

$$x\in]a,b[\ \Rightarrow f(x)\in]f(a),f(b)[\ .$$

هذا الاستلزام يؤدي إلى الاستلزامين :

$$a\in]x,b[\ \Rightarrow f(a)\in]f(x),f(b)[$$

$$b \in \left]a, x\right[\Rightarrow f(b) \in \left]f(a), f(x)\right[.$$

استخلص مما سبق التزايد التام للدالة f (لا تنس أننا افترضنا أن $f(a) < f(b)$). ولو افترضنا $f(a) > f(b)$ لتوصلنا باتباع الخطوات السابقة إلى التناقص التام الدالة.

هناك خواص أخرى تتمتع بها الدوال المستمرة تربطها بكثيرات الحدود التي تعتبر من أبسط الدوال المستمرة. ومن تلك النتائج نسوق اثنتين هما :

نظرية (تقريب فيرشتراس Weierstrass)

لتكن دالة $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ مستمرة حيث I مجال متراص. توجد متتالية كثيرات حدود P_n تتقارب بانتظام نحو f، أي $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in I} \left| f(x) - P_n(x) \right| < \varepsilon .$$

7. رمزَا لوندو Landau

هناك رمزان كثيرا الاستعمال في تقريبات الدوال هما رمزا لوندو Landau: نعتبر دالتين f و g معرفتين بجوار نقطة x_0 مع إمكانية السماح للدالتين ألا تكونا معرفتين عند x_0.

تعريف (رمزا لوندو $f = \circ(g)$ و $f = \mathrm{O}(g)$)

نقول إن f مهملة أمام g بجوار x_0 (أو عندما يؤول المتغير إلى x_0 أو عند x_0) إذا كان $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. نكتب في هذه الحالة $f = \circ(g)$.   نقول إن f مهيمنة على g بجوار x_0 (أو عندما يؤول المتغير إلى x_0 أو عند x_0) إذا كان $\frac{f}{g}$ محدودا بجوار x_0 . نكتب في هذه الحالة $f = \mathrm{O}(g)$.

ملاحظة

1) ماذا تعني الكتابتان $f = \circ(g)$ و $f = \mathrm{O}(g)$ في حالة $g = 1$؟

إذا كان $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ و $g = 1$ فإن :

$$0=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{1}=\lim_{x\to x_0}f(x).$$

ومنه $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$.

كما أنه من السهل التأكد من أن العلاقة الأخيرة تستلزم أن $f=\circ(g)$ باعتبار $g=1$. ولذلك نستطيع كتابة التكافؤ :

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0 \;\Leftrightarrow\; f=\circ(1).$$

ومن جهة أخرى، إذا كان $f=\mathrm{O}(g)$ في حالة $g=1$ فمعناه أن $\left|\frac{f}{1}\right|$ محدود، أي أن f محدود.

تمرين

تأكد من صحة العلاقات التالية بجوار 0 :

1) $x^2=\circ(x)$ ،

2) $\sin x=\circ(\sqrt{|x|})$ ،

3) $x^2\sin\frac{1}{x}+x^4=\circ(\mathrm{tn}x)$ ،

4) $x^2\sin\frac{1}{x}=\mathrm{O}(x^2)$ ،

5) $x^2\sin\frac{1}{x}+x^4+6x^2=\mathrm{O}(x^2)$ ،

6) $x^2\sin\frac{1}{x}+5x+6x^2=\mathrm{O}(x)$.

الحل

1) $x^2=\circ(x)$ لأن $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0$ ،

2) $\sin x=\circ(\sqrt{|x|})$ لأن :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{|x|}}&=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{|x|}}\times\frac{\sin x}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{|x|}}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\\&=0\times 1\\&=0.\end{aligned}$$

3) $x^2\sin\frac{1}{x}+x^4=\circ(\mathrm{tn}x)$ لأن :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+x^4}{\mathrm{tn}x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\mathrm{tn}x}+\frac{x^4}{\mathrm{tn}x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\mathrm{tn}x}\times x\sin\frac{1}{x}+\frac{x}{\mathrm{tn}x}\times x^3\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\mathrm{tn}x}\right)\times\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\mathrm{tn}x}\right)\times\lim_{x\to 0}x^3\\
&= 1\times 0+1\times 0\\
&= 0.
\end{aligned}$$

4) $x^2\sin\frac{1}{x}=\mathrm{O}(x^2)$ لأن $\left|\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^2}\right|=\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1$ من أجل كل x غير منعدم.

5) $x^2\sin\frac{1}{x}+x^4+6x^2=\mathrm{O}(x^2)$ لأن (باعتبار أن جوار 0 هو مثلا المجال $]-1,1[$) :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+x^4+6x^2}{x^2}\right| &= \left|\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^2}\right|+\left|\frac{x^4}{x^2}\right|+\left|\frac{6x^2}{x^2}\right|\\
&= \left|\sin\frac{1}{x}\right|+x^2+6\\
&\le 1+1+6\\
&= 7.
\end{aligned}$$

6) $x^2\sin\frac{1}{x}+5x+6x^2=\mathrm{O}(x)$ لأن (باعتبار أن جوار 0 هو مثلا المجال $]-1,2[$) :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+5x+6x^2}{x}\right| &\le \left|\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\right|+\left|\frac{5x}{x}\right|+\left|\frac{6x^2}{x}\right|\\
&\le \left|x\sin\frac{1}{x}\right|+5+6|x|\\
&\le 2+5+6\times 2\\
&= 19.
\end{aligned}$$

تمرين

تأكد من صحة العلاقات التالية بجوار $+\infty$:

1) $\frac{1}{x^2} = \circ(\frac{1}{\sqrt{x}})$ ،

2) $x^2 \sin\frac{1}{x} + x = \circ(x^3)$ ،

3) $x + 2x^3 = \mathrm{O}(x^3)$ ،

4) $x^2 \cos\frac{1}{x} + 5x^3 \sin\frac{1}{x} = \mathrm{O}(x^2)$.

الحل

1) $\frac{1}{x^2} = \circ(\frac{1}{\sqrt{x}})$ لأن

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0.$$

2) $x^2 \sin\frac{1}{x} + x = \circ(x^3)$ لأن

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} + x}{x^3} &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^3} + \frac{x}{x^3}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\times\sin\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}\times\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\\ &= 0\times 0 + 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

3) $x + 2x^3 = \mathrm{O}(x^3)$ لأنه يكفي أن نثبت بأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2x^3}{x^3}$ موجودة. لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2x^3}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^3} + \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^3} = 0 + 2 = 2.$$

4) $x^2 \cos\frac{1}{x} + 5x^3 \sin\frac{1}{x} = \mathrm{O}(x^2)$ لأنه يكفي أن نثبت بأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cos\frac{1}{x} + 5x^3\sin\frac{1}{x}}{x^2}$ موجـــودة.

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}+5x^3\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3\sin\frac{1}{x}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{5\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$
$$=\cos 0+\lim_{y\to 0}5\frac{\sin y}{y}$$
$$=1+5=6.$$

نظرية (جمع رمزي لوندو)

أ) $\circ(f)=\circ(f)+\circ(f)$ ،

ب) $\mathrm{O}(f)=\mathrm{O}(f)+\mathrm{O}(f)$ ،

ج) $\mathrm{O}(f)=\circ(f)+\mathrm{O}(f)$.

البرهان

أ) لدينا $\circ(f)=\circ(f)+\circ(f)$ لأن (باعتبار الأمر يتعلق بجوار نقطة x_0) :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\circ(f)(x)+\circ(f)(x)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\circ(f)(x)}{f(x)}+\lim_{x\to x_0}\frac{\circ(f)(x)}{f(x)}$$
$$=0+0=0.$$

ب) لدينا $\mathrm{O}(f)=\mathrm{O}(f)+\mathrm{O}(f)$ لأنه يوجد ثابت M بحيث $\left|\frac{\mathrm{O}(f)}{f}\right|\le M$. وبالتالي :

$$\left|\frac{\mathrm{O}(f)+\mathrm{O}(f)}{f}\right|\le\left|\frac{\mathrm{O}(f)}{f}\right|+\left|\frac{\mathrm{O}(f)}{f}\right|$$
$$\le M+M=2M.$$

ج) لدينا $\mathrm{O}(f)=\circ(f)+\mathrm{O}(f)$ لأنه يوجد ثابت M بحيث $\left|\frac{\mathrm{O}(f)}{f}\right|\le M$ و $\left|\frac{\circ(f)}{f}\right|\le M$ (تـذكر أن $\lim_{x\to x_0}\left|\frac{\circ(f)}{f}\right|=0$ تؤدي إلى محدودية $\frac{\circ(f)}{f}$ بجوار x_0). ولذلك فإن

$$\left|\frac{\circ(f)+\mathrm{O}(f)}{f}\right|\le\left|\frac{\mathrm{O}(f)}{f}\right|+\left|\frac{\circ(f)}{f}\right|$$
$$\le M+M=2M.$$