الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

جامعة عبد الحفيظ بوالصوف
ملحقة المدرسة العليا للأساتذة
التحليل 1

السنة الجامعية: 2025-2026
الطور المتوسط - رياضيات
السنة الأولى

السلسلة الثانية

التمرين ١ أدرس المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بعبارة الحد العام:

$$u_n = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+p}.$$

التمرين ٢ باستعمال البرهان بالتراجع أثبت أن:

- $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

التمرين ٣ برهن أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى (متقاربة), بحيث:

$$u_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.$$

التمرين ٤ حدد مع تعليل اجابتك ما إذا كانت المتتاليات التالية متقاربة أو لا:

- $U_n = \dfrac{\cos n - 2}{n^4}, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$
- $V_n = \dfrac{3n+5(-1)^n}{2n+1}, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$
- $W_n = (-1)^n\left(\dfrac{n+1}{n}\right), \quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$
- $Z_n = \sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*\cdots(*).$

- $X_n = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$
- $Y_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}.$

التمرين ٥ لتكن $U_n = \frac{E(\sqrt{n})}{n}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$.

١. أثبت أن $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$.

٢. أثبت أن $V_n = \frac{E(\sqrt{n})^2}{n},\ n \in \mathbb{N}^*$ متتالية متقاربة مع تحديد نهايتها....(*)

التمرين ٦ لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة ب:

$$u_n = \frac{1}{3+|\sin(1)|\sqrt{1}} + \frac{1}{3+|\sin(2)|\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{3+|\sin(n)|\sqrt{n}}$$

أثبت أن: $\lim_{n\to\infty} U_n = +\infty$.

التمرين ٧ أثبت أن المتتاليتان U_n و V_n متتاليتان متجاورتان بحيث:

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \qquad V_n = U_n - \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

التمرين ٨ أثبت أن المتتالية $u_n = \frac{n^2-1}{n^2}$ هي متتالية كوشي (تطبيق تعريف متتالية كوشي مباشرة).

التمرين ٩ أثبت أن المتتالية التي تحقق الشرط $|x_n - x_{n+1}| < \frac{1}{5^n}$ هي متتالية متقاربة.