1. مقدمة

تعتبر المتتاليات من أهمّ الأدوات المستخدمة في الرياضيات. ذلك أنها تتميز بصفة "التقطع" الناجمة عن ارتباط المتتاليات بالأعداد الطبيعية التي يدركها فكرنا أكثر مما يدرك الأعداد الأخرى كالأعداد الحقيقية أو المركبة (العقدية). والدليل على ذلك ظهور واستخدام الأعداد الطبيعية قبل سائر أنماط الأعداد الأخرى.

والملاحظ أن الرياضيين ليسوا الوحيدين الذين يفضلون عموما العمل بالمتتاليات بدل الأدوات الأخرى (كالدوال مثلا). أنظر إلى الجغرافيين والإحصائيين والفيزيائيين وغيرهم من العاملين في حقول المعرفة المختلفة ... إنهم جميعا يستخدمون المتتاليات ولا يلجئون إلى الدوال إلا عند الضرورة. ومن لم يسمع مثلا بمتتالية فيبوناتشي Fibonacci (1170–1250)، أي المتتالية التي يكون أي عنصر منها يساوي مجموع العنصرين السابقين له، مع العلم أن العنصرين الأول والثاني معلومان)؟ إنها متتالية تدخل في توزيع وتنظيم مواقع ورق بعض النباتات حول الأغصان. والأغرب من ذلك أن هذا التوزيع يضمن وصول أشعة الشمس بأكبر قدر ممكن إلى أوراق هذه النباتات. وقد أثبت R. Jones عام 1975 بأن عناصر هذه المتتالية تمثل جذورا لكثيرات حدود من الدرجة الخامسة.

كما أن لهذه المتتاليات صلة بقانون توالد بعض الحيوانات كالأرانب. ومن المعلوم أن فيبوناتشي أثبت أن متتاليته تمثل حلا للمسألة التالية : كم زوجا من الأرانب يمكن الحصول عليها خلال سنة عندما يكون لنا في البداية زوج واحد وإذا علمنا أن كل زوج يلد زوجا آخر كل شهر؟

وقد تسائل بعضهم عن إمكانية إنشاء متتالية فيبوناتشية مكونة من الأعداد الأولية. لكن Graham أثبت قضية أخرى تقول إنه بالإمكان إنشاء متتالية فيبوناتشية لا يظهر فيها أي عدد أولي باستثناء الأول والثاني. نشير إلى هذه التفاصيل لإبراز مدى تشعب موضوع المتتاليات.

أين نجد المتتاليات في الرياضيات؟ إنها موجودة على سبيل المثال في :

– مفهوم الكثافة : كثافة مجموعة جزئية من فضاء طبولوجي في نفس الفضاء أو فضاء آخر. إنه مفهوم بالغ الأهمية في التحليل الرياضي : فأنت إذا أردت مثلا إثبات مساواة أو متباينة في مجموعة الأعداد الحقيقية يكفيك في أغلب الأحيان أن تثبتها في مجموعة الأعداد الناطقة، وهذا بفضل "كثافة" هذه المجموعة الأخيرة في مجموعة العداد الحقيقية.

– دراسة المعادلات التفاضلية : نحصل على حلول هذه المعادلات في الكثير من الأحيان كنهايات متتاليات تقرّبنا شيئا فشيئا من الحل الدقيق.

– في الحساب (أو التحليل) العددي : التقريبات وتقديرات الأخطاء تتم عموما عبر المتتاليات.

– تعريف مفاهيم رياضية أخرى : الانتقال مثلا من تعريف مفهوم المكاملة للدالة معرفة على مجال حقيقي وتأخذ قيمها في فضاء مجرد – فضاء باناخي Banach (1892–1945) مثل $\mathbb{R}^n$ – يمر عبر المتتاليات.

وكتطبيق للمتتاليات سنوضح كيف يمكن تعريف بعض الدوال المتداولة التي أَلِفَها الأساتذة والتلاميذ باستخدام المتتاليات وخواصها دون سواها. وسيلاحظ القارئ أن التعريف الذي لا يستعمل سوى المتتاليات يعطي تدريجيا جميع الخواص التي تتمتع بها تلك الدوال. وسنكتفي في هذا المقام بعينة من الدوال تتمثل في الدالة الأسية.

غير أن دراسة هذه الدالة والإلمام بخواصها (باستعمال المتتاليات، لا غير) تمكننا من الحصول بصفة مباشرة على تعريف دوال أخرى بالمتتاليات، نذكر منها : الدالة اللوغاريتمية (بوصفها الدالة العكسية للدالة الأسية).

2. تعاريف

تعريف (المتتالية)

* يسمى كل تطبيق

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ **متتالية حقيقية**.

* يسمى كل تطبيق

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{C} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ في مجموعة الأعداد العقدية (أو المركبة) $\mathbb{C}$ **متتالية عقدية**.

رمز المتتاليات : نرمز عادة لمتتالية بــ $(u_n)_{n\geq 0}$ أو اختصارا بــ (u_n) إن كانت مجموعة تعريفها واضحة ... لأنه من الجائز أن تكون متتالية معرّفة على جزء فقط من $\mathbb{N}$. سنتبنى هذا الرمز من الآن فصاعدا.

مثال

إليك بعض العبارات التي تعرّف متتاليات متداولة :

$u_n=(-1)^n$ ، $u_n=\sqrt{n}$ ، $u_n=\frac{1}{n+2}$ ، $u_n=-\frac{\sqrt{n}}{n+2}$ ، $u_n=(-1)^n i+\frac{n^2}{n^3+1}$.

تعريف (المتتاليات الرتيبة)

* يسمى كل تطبيق من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ في مجموعة أعداد (طبيعية أو صحيحة أو ناطقة أو حقيقية أو مركبة) متتالية عددية.

* نقول عن متتالية **حقيقية** (u_n) إنها **متزايدة (متناقصة**، على الترتيب) إذا كان $u_n \le u_{n+1}$ ($u_n \ge u_{n+1}$ على الترتيب) من أجل كل n في مجموعة الأعداد الطبيعية.

* نقول عن متتالية **حقيقية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنها محدودة من الأعلى إذا وجد ثابت M موجب بحيث
$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\le M$.

* نقول عن متتالية **حقيقية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنها محدودة من الأدنى إذا وجد ثابت M بحيث
$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\ge M$.

* نقول عن متتالية **عددية** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنها محدودة إذا وجد ثابت M موجب بحيث
$\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\le M$.

احذر : لا يجوز أن نتحدث عن رتابة متتالية إذا أخذت قيما عقدية (مركبة) غير حقيقية ... ذلك أن المجموعة $\mathbb{C}$ غير مرتبة !

ملاحظة

1) يمكن إثبات أن متتالية حقيقية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تكون محدودة إذا وفقط إذا كانت محدودة في آن واحد من الأعلى ومن الأدنى.

2) يمكن دائما ردّ تقارب متتالية عقدية إلى تقارب متتالية حقيقية ... يكفي اعتبار الجزء الحقيقي والجزء التخيلي.

سوف نعتبر، في ما يلي، أن المتتاليات معرفة على كامل مجموعة الأعداد الطبيعية إلا إذا أشرنا إلى عكس ذلك.

أمثلة

- المتتالية $u_n=(-1)^n$ غير رتيبة.
- المتتالية $u_n=1+\sqrt{n}$ متزايدة.
- المتتالية $u_n=\frac{1}{n+\sqrt{3}}$ متناقصة.

– المتتالية $u_n = -\dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$ متزايدة.

– المتتالية $u_n = (-1)^n i + \dfrac{n^2}{n^3+1}$ غير رتيبة.

تعريف (تقارب متتالية)

* نقول عن متتالية عددية (u_n) إنها **متقاربة** إذا وجد عدد u بحيث $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - u| = 0$ أي

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |u_n - u| < \varepsilon .$$

* نقول عن متتالية إنها متباعدة عندما لا تكون متقاربة.

تعميم :

* نقول إن متتالية (u_n) تؤول إلى $+\infty$ إذا كان :

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad u_n > A .$$

* نقول إن متتالية (u_n) تؤول إلى $-\infty$ إذا كان :

$$\forall A < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad u_n < A .$$

لكننا لا نقول في الحالتين الأخيرتين إن المتتالية متقاربة، بل نقول إنها متباعدة.

ملاحظة

1) في التعريف السابق، غالبا ما يعبّر الرياضيون عن $"\exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ n \geq n_0"$ بالقول "من أجل n كبيرا" أو " ابتداء من رتبة معينة".

2) نكتفي عادة في المتتاليات بكتابة $\lim\limits_{n} |u_n - u| = 0$ بدل $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - u| = 0$ لأن n يؤول دائما إلى $+\infty$ في موضوع المتتاليات.

3) إذا تقاربت متتالية عددية فإن نهايتها **وحيدة.**

لنتأكد من ذلك بالخلف (نكتفي هنا باعتبار حالة المتتاليات الحقيقية لأن الفكرة ذاتها قائمة في حالة المتتاليات العقدية) : نفرض وجود نهايتين مختلفتين u و u' لمتتالية (u_n) باعتبار مثلا أن $u < u'$. ولنختر في التعريف السابق $\varepsilon = \dfrac{u'-u}{2}$. ومن ثمّ فإن

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |u_n - u| < \varepsilon ,$$

$$\exists n_0' \in \mathbb{N} \ : \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |u_n - u'| < \varepsilon ,$$

وعندما نضع

$$N = \max(n_0, n'_0)$$

نستنتج

$$n \geq N \quad \Rightarrow u' - \frac{u'-u}{2} < u_n < u + \frac{u'-u}{2}$$

أي :

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad \frac{u'+u}{2} < u_n < \frac{u'+u}{2} .$$

وفي العلاقة السابقة تناقض واضح. ومنه المطلوب.

3. عمليات على النهايات

إليك هذه الخواص المتعلقة بالتقارب، والتي نطلب منك العمل على إثباتها.

عندما تكون متتاليتان عدديتان (u_n) و (v_n) متقاربتين فإن :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ،

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ،

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ،

4) من أجل كل عدد λ (حقيقي أو عقدي) : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda v_n) = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ،

5) عندما يكون $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n}$ ،

6) $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = \left|\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right|$ ،

7) إذا كان ابتداء من رتبة معينة $u_n \leq v_n$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ عند وجود النهايتين.

ملاحظة

نستخلص من الخاصية 7) أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}:\ u_n \le 0 \ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty} u_n \le 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}:\ u_n \ge 0 \ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty} u_n \ge 0,$$

وتصدق العلاقتان حتى إن استبدلنا فيهما " $\forall n \in \mathbb{N}$ " بـ " $\forall n \ge n_0$ " حيث $n_0 \in \mathbb{N}$.

احذر : إذا كان $u_n > 0$ ابتداء من أول رتبة أو ابتداء من رتبة معينة فهذا يؤدي إلى $\lim_{n\to+\infty} u_n \ge 0$ ... ولا يؤدي بالضرورة إلى $\lim_{n\to+\infty} u_n > 0$. للتأكد من ذلك خذ على سبيل المثال $u_n = \frac{1}{n}$ الموجبة تماما، لكن ذلك لم يمنع انعدام نهايتها.

نظرية (التقارب والمحدودية)

كل متتالية عددية **متقاربة** متتالية **محدودة**. والعكس غير صحيح.

البرهان

للتأكد من ذلك نكتب أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو عدد u، أي أن

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \ n \ge n_0 \ \ \Rightarrow\ \ |u_n - u| < \varepsilon$$

ثم نختار في هذه العلاقة $\varepsilon = 1$ مثلا، فيكون

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ \ n \ge n_0 \ \ \Rightarrow\ \ |u_n - u| < 1$$

ومنه :

$$n \ge n_0 \ \ \Rightarrow\ \ |u_n| < 1 + |u|.$$

ليكن K حادا من الأعلى للمجموعة $\{|u_0|,\ |u_1|, ...,\ |u_{n_0-1}|\}$ و $M = \max\{1+|u|, K\}$. لاحظ عندئذ أن:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \le M\ .$$

وهو المطلوب.

العكس غير صحيح : المثال المضاد البسيط والشهير يتمثل في المتتالية $u_n = (-1)^n$ التي سيتناولها المثال 1) الموالي.

أمثلة

1) المتتالية $u_n = (-1)^n$ غير متقاربة (وهي محدودة). يمكن تبرير ذلك بالخلف، كما يلي : نفرض وجود نهاية u لهذه المتتالية. تستفيد من العلاقة

$$(0) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in IN \ : \ n \geq n_0 \ \Rightarrow \ |u_n - u| < \varepsilon$$

باعتبار أولا n زوجيا فيأتي

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in IN \ : \ n \geq n_0 \ \Rightarrow \ |1 - u| < \varepsilon$$

عندئذ نلاحظ أن (1) تستلزم $u = 1$.

ثم باعتبار n فرديا يأتي :

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in IN \ : \ n \geq n_0 \ \Rightarrow \ |-1 - u| < \varepsilon$$

عندئذ نلاحظ أن (2) تستلزم $u = -1$. وبما أننا لا نستطيع الحصول على $u = 1$ و $u = -1$ في آن واحد نستنتج أن العلاقة (0) مستحيلة. وبالتالي فالمتتالية متباعدة.

2) المتتالية $u_n = \sqrt{n}$ متباعدة. يمكن ملاحظة أنها تؤول إلى $+\infty$ (وهذا لا يعني أنها متقاربة لأن التقارب يستوجب أن تكون النهاية في $\mathbb{R}$ ... و $+\infty$ لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$). كيف نبرّر أنها تؤول إلى $+\infty$؟ خذ أي عدد ε موجبا (مهما كان كبيرا). يوجد دوما عدد طبيعي n_ε بحيث : $n \geq n_\varepsilon \ \Leftarrow \ \sqrt{n} > \varepsilon$. يكفي اختيار مثلا $n_\varepsilon = ([\varepsilon] + 2)^2$. تأكد من ذلك.

3) المتتالية $u_n = \dfrac{1}{n+2}$ متقاربة نحو 0. ذلك أنه يكفي أن نختار في العلاقة (0) : $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

4) المتتالية $u_n = -\dfrac{3n}{n+2}$ متقاربة نحو 3 . ذلك أنه يكفي أن نختار في العلاقة (0) : $n_0 > \dfrac{2}{\varepsilon}$.

5) المتتالية $u_n = (-1)^n i + \dfrac{n^2}{n^3+1}$ غير متقاربة. تأكد من ذلك بالاستفادة من تباعد المتتالية $u_n = (-1)^n i$.

4. نظريات حول تقارب المتتاليات

يهمنا هنا تقديم بعض النتائج المتداولة في المتتايات، سيما تلك التي تؤدي إلى التقارب.

نظرية (الحصر)

إذا كانت لدينا 3 متتاليات حقيقية تحقق

$$\begin{cases} v_n \le u_n \le w_n \\ \lim v_n = \lim w_n = k \\ k \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

فإن (u_n) متقاربة ونهايتها هي k.

لنثبت ذلك : ليكن $\varepsilon > 0$. إن تقارب المتتاليتين (v_n) و (w_n) نحو k يؤدي إلى وجود عددين طبيعيين m و m' بحيث

$$n \ge m \;\Rightarrow\; |v_n - k| < \varepsilon$$

$$n \ge m' \;\Rightarrow\; |w_n - k| < \varepsilon .$$

لنضع n_0 أكبر العددين m و m'. تأكد عندئذ أن

$$n \ge n_0 \;\Rightarrow\; |u_n - k| < \varepsilon .$$

ومنه تقارب (u_n) نحو k لأننا نحصل بفضل العلاقة $v_n \le u_n \le w_n$ على $-\varepsilon < v_n - k \le u_n - k \le w_n - k < \varepsilon$ عندما يكون $n \ge n_0$.

نظرية (الرتابة و التقارب)

كل متتالية حقيقية رتيبة ومحدودة متتالية متقاربة، ولدينا :

- إذا كانت متزايدة ومحدودة فالنهاية تساوي الحد الأعلى للمتتالية.
- إذا كانت متناقصة ومحدودة فالنهاية تساوي الحد الأدنى للمتتالية.

البرهان

نعتبر متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة. لاحظ أن تزايد المتتالية يؤدي حتما إلى أنها محدودة من الأدنى بحدها الأدنى. ولذا يمكن الإدراك بأن وجود الحد الأعلى $\sup u_n$ هو الأهم في هذا السياق. كيف نعبّر عن خاصيته المميزة؟ إنها تكتب على الشكل :

$$(1)\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ \sup u_n - \varepsilon < u_{n_0} \le \sup u_n < \sup u_n + \varepsilon .$$

ثم نلاحظ بفضل تزايد المتتالية أن :

$$(2) \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad u_n \geq u_{n_0}$$

وعندما ندمج (1) و (2) نحصل على :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0$$
$$\Downarrow$$
$$\sup u_n - \varepsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq \sup u_n < \sup u_n + \varepsilon$$

التي يمكن اختصارها في الكتابة

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ n \geq n_0 \Rightarrow \sup u_n - \varepsilon < u_n < \sup u_n + \varepsilon$$

المعبّرة عن أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو $\sup u_n$.

يمكن البرهان بطريقة مماثلة على الجزء المتبقي من النظرية.

تعريف (المتتاليات الجزئية)

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية. نقول عن متتالية (v_n) إنها مستخرجة من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (أو إنها جزئية من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) إذا وجد تطبيق $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ متزايد تماما بحيث

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad v_n = u_{f(n)}.$$

يمكن إثبات الخواص التالية ذات الصلة بالمتتاليات الجزئية :

* إن كانت متتالية عددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو عدد u ، فكل متتالية مستخرجة منها متقاربة نحو u.

* القضية العكسية للقضية السابقة خاطئة.

* **نظرية بولزانو – فيرشتراس** Bolzano-Weierstrass : كل متتالية محدودة تقبل متتالية جزئية متقاربة.

تعريف (التجاور)

نقول عن متتاليتين حقيقيتين (u_n) و (v_n) إنها **متجاورتان** إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة وكانت نهاية متتالية الفرق $(u_n - v_n)$ متقاربة نحو 0.

مثال

المتتاليتان $u_n = -\frac{1}{n}$ و $v_n = \frac{1}{n+1}$ متجاورتان لأن أولاهما متزايدة وثانيتهما متناقصة وفرقهما (المساوي لـــ $\frac{2n+1}{n(n+1)}$ = $v_n - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$) يؤول إلى الصفر.

نظرية (التجاور والتقارب)

كل متتاليتين متجاورتين متتاليتان متقاربتان نحو نفس النهاية.

البرهان

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين متجاورتين أولاهما متزايدة وثانيتهما متناقصة. نضع من أجل كل n : $w_n = u_n - v_n$. من الواضح أن المتتالية (w_n) متزايدة، علما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ حسب فرض التجاور. ولذا $\sup\limits_n w_n = 0$. ومنه، من أجل كل n : $w_n \le 0$. وبالتالي :

$$u_0 \le u_1 \le \ldots \le u_n \le v_n \le \ldots \le v_1 \le v_0$$

وهكذا يتضح أن المتتاليتين رتيبتان ومحدودتان (بـــ u_0 و v_0). إذن فهما متقاربتان علما – مرة أخرى – أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$. ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. وهو المطلوب.

تعريف (نقطة تراكم)

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$ و a نقطة من $\mathbb{R}$ (تنتمي أو لا تنتمي إلى A). نقول عن a إنها **نقطة تراكم** للمجموعة A إذا كان كل مجال مفتوح يشمل a يشمل بالضرورة نقطة من A تختلف عن a.

مثال

1) كل نقاط مجال مفتوح نقاط تراكم له.

2) كل نقطة a من $\mathbb{R}$ نقطة تراكم لـــ $\mathbb{Q}$ لأن كل مجال من الشكل $]a, a+\varepsilon[$ يحتوي عددا ناطقا بفضل كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$ (لاحظ أن هذا العدد يختلف عن a).

نظرية (التراكم والمتتاليات)

كل نقطة تراكم لمجموعة جزئية A من $\mathbb{R}$ تمثل نهاية لمتتالية نقاط من A.

البرهان

نرمز بـــ a لنقطة تراكم A، وليكن $\varepsilon > 0$. يؤكد الفرض وجود عنصر a_1 من A يختلف عن a وينتمي إلى المجال $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$. نضع الآن $\varepsilon_1 = |a - a_1|$ فيتبين لنفس السبب السابق وجود عدد a_2 من A يختلف عن a وينتمي إلى المجال $]a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1[$. نضع مرة أخرى $\varepsilon_2 = |a - a_2|$ فيتبين لنفس السبب السابق أيضا وجود عدد a_3 من A يختلف عن a وينتمي إلى المجال $]a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2[$. وهكذا دواليك، فننشئ متتالية (a_n) من A من الواضح – حسب طريقة إنشائها – أنها متقاربة نحو a.

تمرين 1

أثبت، مستخدما نظرية بولزانو–فيرشتراس، أن كل مجموعة غير منتهية ومحدودة في $\mathbb{R}$ تقبل نقطة تراكم.

الحل

لتكن A مجموعة غير منتهية ومحدودة في $\mathbb{R}$. مادامت A غير منتهية فإنه يوجد تباين $f : \mathbb{N} \to A$. نضع (كي لا نخرج عن المألوف) $a_n = f(n)$ ونستخدم نظرية بولزانو–فيرشتراس (لأن المتتالية (a_n) محدودة) فيتضح وجود متتالية جزئية (a_{n_k}) من (a_n) متقاربة نحو نهاية نرمز إليها بـــ a. إن هذه النهاية نقطة تراكم لـــ A لأن كل مجال $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ يحتوي عدة عناصر من (a_{n_k}) (الواقع أنه يحتوي على عدد غير منته من تلك العناصر ... كل العناصر التي لها دليل k أكبر من رتبة معينة). ومنه يأتي المطلوب.

ملاحظة

النظرية خاطئة في حالة المجموعات غير المحدودة ... تلك حال مجموعة الأعداد الطبيعية (وكذا مجموعة الأعداد الصحيحة) التي لا تقبل نقاط تراكم في $\mathbb{R}$.

تمرين 2

ليكن p عددا طبيعيا غير معدوم مثبتا.

أثبت أن المتتالية (u_n) المعرفة بـــ $u_n = \frac{1}{n^p} C_n^{\,p}$ (حيث $C_n^{\,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$) متقاربة ونهايتها $\frac{1}{p!}$.

إرشاد : أثبت أولا أن $u_n = \frac{1}{n^p} C_n^{\,p} = \frac{1}{p!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{p-1}{n})$.

الحل

لدينا :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{p-1}{n})\\
&=\frac{1}{p!}\times\frac{(n-1)(n-2)...(n-(p-1))}{p^{p-1}}\times\frac{(n-p)...2.1}{(n-p)...2.1}\\
&=\frac{1}{p!}\times\frac{(n-1)!}{n^{p-1}}\times\frac{1}{(n-p)!}\\
&=\frac{1}{p!}\times\frac{n!}{n^{p}}\times\frac{1}{(n-p)!}\\
&=\frac{1}{n^{p}}C_n^{\,p}\\
&=u_n.
\end{aligned}$$

ومن جهة أخرى،

$$\forall j=1,...,p-1: \quad 1-\frac{j}{n}\leq 1,$$

ومنه :

$$\left(1-\frac{p-1}{n}\right)^{p-1}\leq(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{p-1}{n}).$$

وبالتالي :

$$\left(1-\frac{p-1}{n}\right)^{p-1}\frac{1}{p!}\leq u_n\leq\frac{1}{p!}.$$

لاحظ أن $\lim\limits_{n}\left(1-\dfrac{p-1}{n}\right)^{p-1}=1$ (تأكد من ذلك بتطبيق التعريف). ولذلك عندما نجعل n يؤول إلى $+\infty$ في المتباينة السابقة (مع ترك p مثبتا) نحصل على المطلوب، وهو أن نهاية المتتالية (u_n) تساوي $\dfrac{1}{p!}$.

تمرين 3

لتكن المتتاليتان (u_n) و (v_n) المعرفتان بـــ

$$\forall n\in IN,\quad u_n=\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}$$

و

$$\forall n \in IN^*, \quad v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

1) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة، ونهايتها محصورة بين 2.7 و 3.

2) أثبت أن المتتالية (v_n) متزايدة ومتقاربة، ونهايتها تساوي نهاية المتتالية (u_n).

الحل

1) من الواضح أن المتتالية (u_n) متزايدة. ثم إننا نستطيع التأكد بالتراجع من أن

$$\forall p \geq 1, \qquad \frac{1}{p!} \leq \frac{1}{2^{p-1}}.$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} u_n &\leq 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2^{p-1}} \\ &= 1 + \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^p \\ &\leq 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

إذن فالمتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى. ولذا فهي متقاربة حسب نظرية سابقة. ولدينا : $\lim_n u_n \leq 3$. كما أن

$$2.7 \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = u_4 \leq u_n \leq \lim_n u_n.$$

2) نستطيع، حسب دستور ثنائي الحد، كتابة

$$v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{n^p} C_n^{\ p},$$

$$v_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} \frac{1}{(n+1)^p} C_{n+1}^{\ p}.$$

نعلم حسب التمرين السابق أن :

$$\forall p \leq n: \qquad \frac{1}{n^p} C_n^{\ p} \leq \frac{1}{(n+1)^p} C_{n+1}^{\ p}.$$

ومنه :

$$v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{n^p} C_n^{\ p},$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)^{n+1}} C_{n+1}^{n+1} + \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(n+1)^p} C_{n+1}^{\ p} \\ &\geq \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{n^p} C_n^{\ p} \\ &\geq v_n. \end{aligned}$$

إذن المتتالية (v_n) متزايدة.

ومن جهة أخرى بالرجوع مرة أخرى إلى التمرين السابق يأتي أن :

$$\forall p \leq n, \qquad \frac{1}{n^p} C_n^{\ p} \leq \frac{1}{p!}.$$

ومن ثم :

$$v_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{n^p} C_n^{\ p} \leq \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} = u_n,$$

مع العلم أن $u_n \leq 3$ حسب ما أوضحنا سلفا. لذلك فإن المتتالية (v_n) محدودة. وبما أنها متزايدة فهي متقاربة.

لنعتبر الآن عددين طبيعيين m و n بحيث $m > n \geq 2$. لدينا :

$$\begin{aligned} v_m &= \sum_{p=0}^{m} \frac{1}{m^p} C_m^{\ p} \\ &= 1 + \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{m^p} C_m^{\ p} \\ &\geq 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{m^p} C_m^{\ p}. \end{aligned}$$

عندما نجعل m يؤول إلى $+\infty$ نحصل (انظر التمرين السابق) على

$$\lim_{m\to+\infty} v_m \geq 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} = u_n.$$

ثم نجعل n يؤول إلى لانهاية في هذه المتباينة، فيأتي : $\lim_{m\to+\infty} v_m \geq \lim_{n\to+\infty} u_n$.

ولما كان $v_n \leq u_n$ ينتج :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n \leq \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

ومنه نستخلص نتيجة التوطئة $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

تعريف (أساس اللوغريتم النبيري)

نرمز للنهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) بالحرف e (ويرمز إليه بالحرف هـ بالعربية) ، أي أننا نضع تعريفا :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = e .$$

ملاحظة

1) هذه النهاية هي التي ستكون أساس اللوغريتم النبيري (ولذا اخترنا لها ذلك الرمز)، وهي التي ستمكننا من إنشاء الدالة الأسية عن طريق المتتاليات.

2) يبدو أن الأسكتلندي جون نابيي John Napier (1550–1617) هو أول من شعر بوجود العدد الأس e. وقد كان له الفضل في ابتكار اللوغاريتم النبيري (نسبة إلى اسمه). بل وعرّف اللوغريتم $\log_n$ ذا الأساس n بـــ $\log_n n^x = x$ وحدث ذلك تعميما لتعريف اللوغاريتم ذي الأساس 2.

وكان الرياضي السويسري ليونهارد أولر Euler (1707–1783) قد سمى e بالاسم المعروف الآن خلال القرن الثامن عشر. وقد ثبت أن هذا الثابت لا يستخدم في الرياضيات فحسب بل دخل عددا كبيرا من المجالات منها الاقتصاد وقياس تكاثر الخلايا الحية في جسم. كما يدخل في توزيع الأعداد الأولية في قائمة الأعداد الطبيعية. ومن المعلوم أن العدد e مثل π عدد أصم (أي غير ناطق) ومتسام (أي أنه ليس حلا لمعادلة جبرية ذات معاملات ناطقة). ولذا لا يمكن تحديد هذا العدد بدقة مع العلم أن الأرقام العشرية غير منتهية وليست دورية. ومن ثمّ انكب بعض الرياضيين على تعيين الأرقام العشرية وقد توصلوا الآن الى أكثر من مليار وربع المليار رقم بعد الفاصلة ... ولا شك أنهم سيجدون المزيد والمزيد من هذه الأرقام مستقبلا.

نظرية (تقارب متتالية خاصة)

ليكن n_0 في $\mathbb{N}^*$. إن المتتالية (v_n) المعرفة بـــ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \left(1+\frac{n_0}{n}\right)^n$$

متقاربة.

البرهان

1) أجبنا في التمرين السابق عن الحالة التي يكون فيها $n_0 = 1$.

2) نفرض أن $2 \le n_0$. لدينا :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad n+1 \leq nn_0 .$$

ومنه يأتي بناء على تمرين سابق :

$$1 \leq p \leq n, \qquad {n_0}^p \frac{1}{n^p}.{C_n}^p \leq {n_0}^p \frac{1}{(n+1)^p} {C_n}^p$$
$$\leq {n_0}^p \frac{1}{(nn_0)^p} {C_{nn_0}}^p .$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned}\forall n \geq 1, \qquad v_n &= 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n^p} C_n^p . {n_0}^p \\ &\leq 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(n+1)^p} C_{n+1}^p . {n_0}^p \\ &\leq 1 + \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)^p} C_{n+1}^p . {n_0}^p = v_{n+1} .\end{aligned}$$

وعليه فإن المتتالية (v_n) متزايدة.

لنثبت أن (v_n) محدودة. لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1 + \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)^p} C_{n+1}^p . {n_0}^p \\ &\leq 1 + \sum_{p=1}^{nn_0} \frac{1}{(nn_0)^p} C_{nn_0}^p . {n_0}^p \\ &= \sum_{p=0}^{nn_0} \frac{1}{n^p} C_{nn_0}^p \\ &= (1+\frac{1}{n})^{nn_0} .\end{aligned}$$

ولذلك نحصل (باستخدام التمرين السابق) على

$$\forall n \geq 1, \qquad v_n \leq v_{n+1} \leq \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{n_0} \leq 3^{n_0} .$$

إذن فالمتتالية (v_n) محدودة (من الأعلى والأسفل لأنها موجبة). وهكذا ينتج أنها متقاربة بوصفها متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى.

5. المتتاليات الكوشية

تؤدي متتاليات كوشي دورا بارزا في التحليل عندما يتعلق الأمر بمعرفة طبيعة المتتاليات، وما يميّزها أنها تسمح بالتأكد من تقارب متتالية دون الحاجة إلى التعرّف مسبقا على نهايتها.

تعريف (المتتاليات الكوشية)

نقول عن متتالية عددية (u_n) إنها **كوشية**، أو لكوشي Cauchy، إذا كان :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad n \geq n_0 \quad \wedge \quad m \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |u_n - u_m| < \varepsilon .$$

ملاحظة

1) يمكن أيضا التعبير عن هذه العلاقة بالكتابة

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad n \geq n_0 \quad \wedge \quad p \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon .$$

2) البرهان على تقارب متتالية باستخدام التعريف يعني إيجاد عدد طبيعي n_0 بدلالة ε يحقق العلاقة الواردة في التعريف. ومن ناحية عملية ننطلق من العبارة $|u_n - u|$ ونسعى إلى إيجاد عبارة أو عبارات أكبر منها إلى أن نصل إلى عبارة بسيطة بدلالة n فنكتب عندئذ أنها أصغر من ε. ثم من المتباينة الأخيرة نستخرج (غالبا ما يكون في شكل متباينة) العدد الطبيعي n بدلالة ε. وأخيرا يحقّ لنا أن نسمي ذلك العدد الطبيعي n_0. لاحظ أن العدد الطبيعي المحصل عليه ليس وحيدا ... فإن حددت قيمة له فكل القيم الأكبر منه يمكن أن تكون أيضا n_0.

3) **مثالان**

1) كيف نبيّن أن المتتالية (u_n) المعرفة بـــ $u_n = \frac{1}{n}$ متقاربة نحو 0؟

نكتب $\frac{1}{n} < \varepsilon$ $|u_n - u| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. وهذا يؤدي إلى $n > \frac{1}{\varepsilon}$. إذن يكفي أن نختار $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ ، مثلا : $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. وكما أشرنا فإن أي عدد طبيعي أكبر من $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ صالح أن يكون قيمة لـــ لـــ n_0 لأنه يحقق بالضرورة التعريف.

2) كيف نبيّن أن المتتالية (u_n) المعرفة بـــ $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$ متقاربة نحو 3؟

نكتب

$$|u_n - u| = \left|\frac{3n-1}{n+1} - 3\right| = \left|\frac{-1-3}{n+1}\right| = \frac{4}{n+1} < \frac{4}{n} < \varepsilon .$$

ومنه يأتي أن $\frac{4}{\varepsilon} < n$. إذن يكفي أن نختار $n_0 > \frac{4}{\varepsilon}$، مثلا $n_0 = \left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1$.

نقدم النظرية التالية التي تعبّر عن تمام فضاء الأعداد الحقيقية وكذا فضاء الأعداد المركبة.

نظرية (تقارب المتتاليات الكوشية)

> تكون متتالية عددية متقاربة إذا وفقط إذا كانت كوشية.

برهان

أولا : إذا كانت (u_n) متقاربة نحو u فإننا نستطيع كتابة

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &= |(u_p - u) + (u - u_q)| \\ &\le |u_p - u| + |u - u_q|. \end{aligned}$$

وبالمرور إلى النهاية في الطرفين نجد :

$$0 \le \lim_{\substack{p\to+\infty \\ q\to+\infty}} |u_p - u_q| \le \lim_{p\to+\infty} |u_p - u| + \lim_{q\to+\infty} |u - u_q| = 0 + 0,$$

لأن $\lim_{p\to+\infty} |u_p - u| = 0$ و $\lim_{q\to+\infty} |u - u_q| = 0$ بفضل تقارب المتتالية. ومنه $\lim_{\substack{p\to+\infty \\ q\to+\infty}} |u_p - u_q| = 0$.

ثانيا : نفرض الآن أن شرط كوشي محقق، أي أن $\lim_{\substack{p\to+\infty \\ q\to+\infty}} |u_p - u_q| = 0$.

والمطلوب إثبات تقارب المتتالية. نفترض أن المتتالية حقيقية (يكفي اعتبار متتاليتي الجزء الحقيقي والجزء التخيلي في حالة متتالية عقدية). نثبت في البداية أن شرط كوشي يؤدي إلى محدودية المتتالية.

ليكن $\varepsilon > 0$ مثبتا. وليكن n_0 العدد الطبيعي الموافق لـــ ε في شرط كوشي، أي العدد الذي يحقق

$$p \ge n_0 \ \wedge \ q \ge n_0 \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$$

نختار في هذه العلاقة $p = n_0$ فيأتي

$$q \ge n_0 \Rightarrow |u_q| < |u_{n_0}| + \varepsilon$$

وبالتالي فكل عناصر المتتالية التي دليلها أكبر من n_0 محدودة. ثم إن المجموعة المنتهية $\{u_0, u_1, ..., u_{n_0-1}\}$ محدودة بأكبر عنصر فيها. ومنه فالمتتالية (u_n) محدودة.

لنضع الآن، من أجل كل عدد طبيعي n:

$$A_n=\{u_k : k\ge n\}\subset\mathbb{R}.$$

بما أن المتتالية (u_n) محدودة فإن المجموعة A_n محدودة. ولذلك فلها حد أدنى نرمز إليه بـــ a_n وحد أعلى نرمز إليه بـــ b_n. لاحظ صحة العلاقة التالية :

$$A_{n+1}\subset A_n \Rightarrow [a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n].$$

وبذلك نرى أن المجالات $[a_n,b_n]$ متداخلة، وعليه فإن (a_n) متزايدة و (b_n) متناقصة.

ومن جهة أخرى يمكن – باعتبار $\varepsilon>0$ مثبتا و n_0 العدد الطبيعي الموافق لـــ ε في شرط كوشي و $n_0\le n$ – كتابة ما يلي (حسب الخاصية المميزة لكل من الحد الأدنى والأحد الأعلى) :

$$\exists p\ge n,\quad u_p<a_n+\varepsilon$$
$$\exists q\ge n,\quad u_q>b_n-\varepsilon,$$

ومنه ينتج بعد كتابة :

$$b_n-a_n=(b_n-u_q)+(u_q-u_p)+(u_p-a_n)$$

أن :

$$b_n-a_n\le(b_n-u_q)+|u_q-u_p|+(u_p-a_n)$$
$$<3\varepsilon.$$

ولذا يتضح أن لدينا العلاقة :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ n\ge n_0 \ \Rightarrow\ |b_n-a_n|<3\varepsilon$$

التي تعني أن $\lim\limits_{n\to+\infty}|b_n-a_n|=0$. وبالتالي فالمتتاليتان (a_n) و (b_n) متجاورتان (تذكر أن (a_n) متزايدة و (b_n) متناقصة). إن النهاية المشتركة لهما هي نهاية المتتالية (u_n) لأن تعريف A_n و (a_n) و (b_n) يبيّن أن :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ a_n\le u_n\le b_n.$$

والمرور إلى النهاية في العلاقة السابقة يثبت تقارب (u_n) و $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$. وبذلك ينتهي برهان النظرية.

ملاحظة

يعمم تعريف المتتاليات الكوشية إلى فضاءات أوسع من $\mathbb{R}$ ومن $\mathbb{C}$ ... إلى فضاءات مجردة، يطلق عليها اسم الفضاءات المترية. وحينئذ تظهر أهمية المتتاليات الكوشية لأن هناك فضاءات مترية تصدق فيها النظرية السابقة (كل المتتاليات الكوشية متتاليات متقاربة وكل المتتاليات المتقاربة كوشية) وهناك فضاءات مترية أخرى نجد فيها متتاليات كوشية غير متقاربة ! تسمى فئة الفضاءات المترية التي تصدق فيها النظرية السابقة الفضاءات التامة.

وكمثال على فضاء غير تام (أي أننا نجد فيه متتاليات كوشية غير متقاربة) يمكن إعطاء فضاء الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$. لنعتبر عددا $x \notin \mathbb{Q}$. نحن نعلم أن $\mathbb{Q}$ كثيف في $\mathbb{R}$، ولذا من أجل كل عدد طبيعي n، يوجد عدد ناطق x_n ينتمي إلى $\left]x-\frac{1}{n},x\right[$. لاحظ أن المتتالية الناطقة (x_n) متقاربة نحو العدد غير الناطق x (لأن $x-\frac{1}{n} \leq x_n \leq x$ والمرور إلى النهاية في كل أطراف هذه العلاقة يثبت المطلوب). ومن جهة أخرى، ما دامت المتتالية (x_n) متقاربة في $\mathbb{R}$ فهي كوشية في $\mathbb{R}$. فمن البديهي إذن أنها كوشية أيضا في $\mathbb{Q}$ لنعتبر مثلا. ما الفائدة من هذا الكلام؟ الفائدة هو أن وحدانية النهاية تؤدي بنا في هذه الحالة إلى القول بأننا أنشأنا متتالية من $\mathbb{Q}$، كوشية في $\mathbb{Q}$ لكنها غير متقاربة في $\mathbb{Q}$ إذ أن نهايتها $x \notin \mathbb{Q}$.

وهكذا نكون قد بيّنا أن $\mathbb{Q}$ غير تام خلافا لـــ $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$.

تؤدي النظرية الموالية دورا هاما في مجموعات الأعداد، ولها مثيلها في الفضاءات المجردة.

6. المتتاليات التدريجية

نتحدث عن متتالية عددية تدريجية إذا كان تعريفها يعطي حدها من الرتبة n بدلالة حد (أو عدة حدود) من رتبة أقل من n. ويمكن التعبير عن مثل هذه المتتاليات الحقيقية عندما يكون الحد u_n من الرتبة معطى بدلالة الحد من الرتبة $n-1$ على النحو التالي :

ننطلق من تابع $f: U \subset \mathbb{R} \to U$ ونعرف المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بـــ :

$$\begin{cases} u_0 = a \in U, \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

حيث a عنصر معطى في U. لماذا نفترض أن مجموعة وصول f هي U : ذلك حتى تكون للعلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ معنى.

في هذه الحالة يمكن رد رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إلى رتابة التابع f. لدينا النتيجة التالية :

نظرية (في الرتابة)

1. إذا كان f متزايدا فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة : متزايدة إن كان $f(u_0)\geq u_0$ ومتناقصة إذا كان $f(u_0)\leq u_0$.
2. إذا كان f متناقصا فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ليست رتيبة : المتتاليتان الجزئيتان (u_{2n+2}) و (u_{2n+1}) من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبتان، إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة.

البرهان

1. إن $f(u_0)\geq u_0$ تعني $u_1\geq u_0$. لاحظ أن تزايد f يؤدي إلى $f(u_1)\geq f(u_0)$، أي $u_2\geq u_1$. نستطيع مواصلة الاستدلال بالتدريج وافتراض أن $u_n\geq u_{n-1}$ فيعطينا تزايد f : $f(u_n)\geq f(u_{n-1})$، أي $u_{n+1}\geq u_n$. ومنه يأتي تزايد $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. بنفس الطريقة نثبت أن تزايد f و قيام العلاقة $f(u_0)\leq u_0$ تؤديان إلى تناقص المتتالية.

2. لاحظ أن تناقص f يستلزم تزايد التابع $g=f\circ f$ وأن :

$$\begin{cases} u_{2n+2}=g(u_{2n}) \\ u_{2n+1}=g(u_{2n-1}) \end{cases}$$

دعنا نضع من أجل التوضيح : $v_n=u_{2n}$ و $w_n=u_{2n+1}$. عندئذ يمكن أن نكتب

$$\begin{cases} v_{n+1}=g(v_n), & n\in\mathbb{N} \\ w_n=g(w_{n-1}), & n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

إذا افترضنا أن $g(u_0)\geq u_0$، أي $g(v_0)\geq v_0$ يتبيّن من النتيجة الأولى أن المتتالية (v_n) متزايدة.
ومن جهة أخرى نستنتج من $g(u_0)\geq u_0$ وتناقص f أن $f\left(g(u_0)\right)\leq g(u_0)$. وهذه العلاقة تكتب $u_3\leq u_1$، أي $g(w_0)\leq w_0$. وبتطبيق النتيجة الأولى على المتتالية (w_n) يتبين تناقص (w_n). ماذا نستخلص من كل ذلك؟ نستخلص أن المتتاليتين الجزئيتين (u_{2n+2}) و (u_{2n+1}) من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبتين، أولاهما متزايدة وثانيتهما متناقصة. وهذا يؤدي بطبيعة الحال إلى عدم رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (لو كانت رتيبة لكانت رتابة جميع متتالياتها الجزئية من نفس النوع).

حدث ذلك عندما انطلقنا من الفرض $g(u_0)\geq u_0$. لاحظ أنه لو انطلقنا من الفرض $g(u_0)\leq u_0$ لظلت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ غير رتيبة ولحدث العكس بالنسبة لرتابة كل من المتتاليتين الجزئيتين (u_{2n+2}) و (u_{2n+1}).

ملاحظة

عندما يكون f "مستمرا" (سنرى هذا المفهوم في فصل آخر) ورتيبا فإن تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نحو u يؤدي إلى العلاقة $f(u)=u$. تفيد هذه الملاحظة في دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ وتعيين نهايتها. فعلى سبيل المثال إن كانت المعادلة $f(u)=u$ ذات المجهول u لا تقبل حلا نستنتج أن المتتالية متباعدة ... وإن تعددت حلولها فلا شك أن نهاية المتتالية ستكون عنصرا من مجموعة تلك الحلول.

مثال

أدرس طبيعة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بــ

$$\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R}^*, \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

للقيام بذلك نلاحظ أن التابع المعتبر هنا هو

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R}^* \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

علما أنه متزايد ومستمر. بتطبيق ما سبق نلخص الحالات الممكنة في ما يأتي :

- إذا كان $a>1$: في هذه الحالة يكون $\sqrt{a}\le a$، أي $f(u_0)\le u_0$. وبالتالي فالمتتالية متناقصة، مع الملاحظة أنها محدودة من الأدنى بــ 1 (يمكن رؤية ذلك بالتدريج). إذن فهي متقاربة ونهايتها $1\le u$. عندما نحل المعادلة $f(x)=x$ نجد أن لها حلين هما $x=0$ و $x=1$. وبما أن $1\le u$ فإن النهاية المطلوبة هي $u=1$.
- إذا كان $a>1$: في هذه الحالة يكون $\sqrt{a}\ge a$، أي $f(u_0)\ge u_0$. وبالتالي فالمتتالية متزايدة، مع الملاحظة أنها محدودة من الأعلى بــ 1 (يمكن رؤية ذلك بالتدريج). إذن فهي متقاربة ونهايتها $1\le u$. عندما نحل المعادلة $f(x)=x$ نجد أن لها حلين، كما أسلفنا، وهما $x=0$ و $x=1$. وبما أن $1\le u$ فإن النهاية المطلوبة هي $u=1$.
- إذا كان $a=1$: في هذه الحالة نلاحظ أن المتتالية المعطاة ثابتة $u_n=1$ من أجل كل عدد طبيعي n.

تمرين 4

أثبت أن المتتالية المعرفة تدريجيا بــ

$$\begin{cases} u_0 = a \in [-1,1], \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\,2}+1}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

متزايدة ومحدودة.

7. تطبيقات على المتتاليات

نستعرض هنا نوعين من التطبيقات للمتتاليات : موضوع تداخل المجالات وموضوع تعريف بعض الدوال الشهيرة استنادا على المتتاليات.

1. تداخل المجالات

إن النتيجة التالية بالغة الأهمية في التحليل، وهي تثبت أن تقاطع فئة من المجالات غير خالية :

نظرية (المجالات المتداخلة)

نعتبر، من أجل كل عدد طبيعي n، المجال المغلق $I_n=[a_n,b_n]$ من $\mathbb{R}$. نفرض أن $I_{n+1}\subset I_n$ من أجل كل n. عندئذ :

1) يكون التقاطع $\bigcap_n I_n$ لكل المجالات I_n قطعة مستقيمة I (ومنه فإن التقاطع غير خال).

2) إذا كان $\lim_{n\to+\infty} b_n-a_n=0$ فإن المتتاليتين (a_n) و (b_n) تكونان متقاربتين نحو نفس النهاية، و $I=\{c\}$ حيث $\lim_{n\to+\infty} b_n=\lim_{n\to+\infty} a_n=c$.

البرهان

1) تبيّن العلاقة $I_{n+1}\subset I_n$ أن

$$a_0\le a_1\le\ldots\le a_n\le b_n\le\ldots\le b_1\le b_0.$$

ومنه فإن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متتاليتان رتيبتان أولاهما متزايدة وثانيتهما متناقصة، وهما محدودتان. ولذا فهما متقاربتان. نضع $\lim_{n\to+\infty} a_n=a$ و $\lim_{n\to+\infty} b_n=b$. لنثبت أن $\bigcap_n I_n=[a,b]=I$.

من الواضح أن $\bigcap_n I_n\supset[a,b]$ لأن المتباينة $a_n\le b_n$ محققة من أجل كل n، ومنه : $a=\lim_{n\to+\infty} a_n\le\lim_{n\to+\infty} b_n=b$. وفي نفس الوقت لدينا :

$$a_n\le a=\sup_n a_n\le b=\inf_n b_n\le b_n.$$

ينتج من ذلك أن $a_n \le a \le b \le b_n$، أي أن $I_n \supset [a,b]$ من أجل كل n. وبالتالي $I = [a,b] = \bigcap_n I_n$.

ومن جهة أخرى، لدينا : $\bigcap_n I_n \subset [a,b]$. للتأكد من ذلك نعتبر عنصر $x \in \bigcap_n I_n$ ونلاحظ أن $a_n \le x \le b_n$ من أجل كل n فيأتي : $a = \lim_{n\to+\infty} a_n \le x \le \lim_{n\to+\infty} b_n = b$. ومنه $x \in [a,b]$. إذن $\bigcap_n I_n \subset [a,b]$. وهكذا نستخلص مما سبق : $\bigcap_n I_n = [a,b]$.

2) نفرض أن $\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$. عندئذ تصبح المتتاليتان (a_n) و (b_n) متجاورتين، ومنه فهما متقاربتان ولهما نفس النهاية c : $a = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = b = c$. وبالتالي $\bigcap_n I_n = [a,b] = \{c\}$. وهو المطلوب.

ملاحظة

لو استبدلنا في النظرية السابقة المجالات المغلقة $I_n = [a_n, b_n]$ بالمجالات المفتوحة $I_n =]a_n, b_n[$ لسقطت نتيجة النظرية. مثال ذلك : $I_n = \left]0, \frac{1}{n}\right[$. لاحظ أن $0 = \lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ ورغم ذلك $\bigcap_n I_n = \phi$.

2. الدالة الأسية

لندخل الدالة الأسية مستخدمين مفهوم المتتاليات :

نظرية (تقارب متتالية "أسية")

> ليكن x و $\mathbb{R}^+$ مثبتا. إن المتتالية $(v_n(x))$ المعرفة كالتالي متقاربة
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$$

البرهان

* لاحظ أن الحالة $x = 0$ لا تستحق الدراسة لوضوحها.

* من أجل $x > 0$، البرهان شبيه ببرهان النظرية السابقة فيما يخص الرتابة : اثبت بإتباع نفس الخطوات أن $(v_n(x))$ متزايدة. لإثبات أن $(v_n(x))$ محدودة من الأعلى نضع $n_0 = [x] + 1$ حيث يرمز $[x]$ للجزء الصحيح لــ x. لدينا (تذكر أن $0 < x$) :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad x^p \le n_0^p \ .$$

ومن ثمّ :

$$v_n(x) \le \sum_{p=0}^{n} \frac{n_0^p}{n^p} C_n^p$$
$$\le \left(1+\frac{n_0}{n}\right)^n .$$

لكن المتتالية $\left((1+\frac{n_0}{n})^n\right)_n$ متزايدة. ولذلك يمكن إيجاد، من أجل كل عدد طبيعي n، عددا طبيعيا k بحيث $n \le kn_0$ و

$$\left(1+\frac{n_0}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{n_0}{kn_0}\right)^{kn_0} = \left((1+\frac{1}{k})^k\right)^{n_0} .$$

ونحن نعلم مما سبق أن

$$\forall k \in IN^*, \qquad (1+\frac{1}{k})^k \le 3.$$

وهكذا يتبيّن أن : $v_n(x) \le 3^{n_0}$. وهو ما يثبت أن المتتالية المتزايدة $(v_n(x))$ محدودة. وبالتالي فهي متقاربة.

إليك التعريف التالي :

تعريف (تعريف الدالة الأسية)

من أجل كل x و $\mathbb{R}$، نعرف **الدالة الأسية** كما يلي :

$$e^x = \lim_{n\to+\infty} (1+\frac{x}{n})^n .$$

ملاحظة

ينتج من هذا التعريف ومن تعريفنا للعدد e أن :

$$e^0 = 1,$$
$$e^1 = \lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e.$$

نذكّر أنه لا يجوز لنا استخدام العلاقة $e^{x+y} = e^x e^y$ الآن لأننا لم نثبتها بعد انطلاقا من تعريفنا للدالة الأسية.

لنستعرض في هذه الفقرة أبرز خواص الدوال كما عرفناها آنفا :

نظرية (مجموع أسين)

لدينا العلاقة التالية، حيث يشير $\mathbb{C}$ إلى مجموعة الأعداد المركبة : $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}, \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_2} \times e^{z_2}.$

البرهان

لدينا من أجل كل عددين مركبين z_1 و z_2 :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z_1}{n}\right)^n \times \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z_2}{n}\right)^n = e^{z_1}\times e^{z_2},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z_1+z_2}{n}\right)^n = e^{z_1+z_2}.$$

لنقارن هاتين النهايتين. من أجل ذلك نكتب :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{z_1}{n}\right)^n\left(1+\frac{z_2}{n}\right)^n &= \left[\left(1+\frac{z_1}{n}\right)\left(1+\frac{z_2}{n}\right)\right]^n\\ &= \left(1+\frac{z_1+z_2}{n}+\frac{z_1z_2}{n^2}\right)^n\\ &= \left(1+\frac{z_1+z_2}{n}\right)^n+\sum_{p=1}^{n}C_n^p\left(1+\frac{z_1+z_2}{n}\right)^{n-p}\left(\frac{z_1z_2}{n}\right)^p\frac{1}{n^p}.\end{aligned}$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned}\left|\left(1+\frac{z_1}{n}\right)^n\left(1+\frac{z_2}{n}\right)^n-\left(1+\frac{z_1+z_2}{n}\right)^n\right| &\le \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}C_n^p\left|1+\frac{z_1+z_2}{n}\right|^{n-p}\left|\frac{z_1z_2}{n}\right|^p\\ &\le \frac{1}{n}\left(1+\frac{|z_1+z_2|}{n}+\frac{|z_1z_2|}{n}\right)^n\\ &\le \frac{1}{n}v_n(|z_1+z_2|+|z_1z_2|)\end{aligned}$$

حيث $v_n(z)=\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ مع الملاحظة أننا نعلم بأن هذه المتتالية محدودة. ومن ثم نستنتج بأن

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}v_n(|z_1+z_2|+|z_1z_2|)=0$$

وعليه :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\left(1+\frac{z_1}{n}\right)^n\left(1+\frac{z_2}{n}\right)^n-\left(1+\frac{z_1+z_2}{n}\right)^n\right|\le\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}v_n(|z_1+z_2|+|z_1z_2|)=0$$

وهكذا :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\left(1+\frac{z_1}{n}\right)^n\left(1+\frac{z_2}{n}\right)^n-\left(1+\frac{z_1+z_2}{n}\right)^n\right|=0$$

وهي المساواة التي تعني :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z_1}{n}\right)^n\left(1+\frac{z_2}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z_1+z_2}{n}\right)^n.$$

ومن ثم تأتي العلاقة المطلوبة.

نظرية (الأس الطبيعي)

ليكن n عددا صحيحا. لدينا : $e^n=(e^1)^n$.

البرهان

يتم بالتراجع انطلاقا من النظرية السابقة التي تعطي العلاقات:

$$e^2=e^{1+1}=e^1.e^1=\left(e^1\right)^2$$

$$1=e^0=e^{1-1}=e^1.e^{-1}\ \Rightarrow\ e^{-1}=\left(e^1\right)^{-1}$$

$$e^{n+1}=e^n.e^1=\left(e^1\right)^n.e^1=\left(e^1\right)^{n+1}$$

نظرية (متباينات)

لدينا، من أجل كل عدد مركب z :

$$\left|e^z-1\right|\le|z|\,e^{|z|}\ ,$$

$$\left|e^z-1-z\right|\le|z|^2e^{|z|}\ .$$

البرهان

لنضع $u_n(z)=\sum_{p=0}^{n}\frac{z^p}{p!}$. عندئذ يكون

$$u_n(z)-1=\sum_{p=1}^{n}\frac{z^p}{p!}.$$

ومنه :

$$|u_n(z)-1| \leq |z|\sum_{p=1}^{n}\frac{|z|^{p-1}}{p!} \leq |z|\sum_{p=1}^{n}\frac{|z|^{p-1}}{(p-1)!} = |z|u_{n-1}(|z|)\ .$$

وعندما نمرّ إلى النهاية في السطر السابق نحصل على

$$|e^z-1| \leq |z|e^{|z|}\ .$$

ومن جهة أخرى، لدينا : $u_n(z)-1-z=\sum_{p=2}^{n}\frac{z^p}{p!}$.

إذن :

$$\begin{aligned}|u_n(z)-1-z| &\leq |z|^2\sum_{p=2}^{n}\frac{|z|^{p-2}}{p!}\\ &\leq |z|^2\sum_{p=2}^{n}\frac{|z|^{p-2}}{(p-2)!}\\ &= |z|^2\sum_{p=0}^{n-2}\frac{|z|^{p}}{p!}\\ &\leq |z|^2 u_{n-2}(|z|).\end{aligned}$$

نجعل الآن n يؤول إلى لانهاية فيما سبق فنحصل على المتباينة :

$$|e^z-1-z| \leq |z|^2 e^{|z|}\ .$$

إليك خواص أخرى للدالة الأسية :

1. نعلم أن $e^x=\lim\limits_{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. وبالتالي $0 \leq e^x$ لأن $0 \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ عندما يكون n كبيرا. وإذا ذكرنا بأن $1=e^x.e^{-x}$ من أجل كل $x \ni \mathbb{R}$ أدركنا بأن $e^x \neq 0$ من أجل كل $x \ni \mathbb{R}$ (نرى ذلك بالخلف). وهكذا تنتج الخاصية :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x > 0.$$

كما أن العلاقة $1=e^x.e^{-x}$ تستلزم $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^{-x}=\frac{1}{e^x}.$$

2. الدالة الأسية متزايدة على مجموعة الأعداد الحقيقية. ذلك لأن

$$x>y \;\Rightarrow\; x-y>0$$

$$\Rightarrow\; \frac{e^x}{e^y}=e^x e^{-y}=e^{x-y}>e^0=1.$$

ومنه يأتي تزايد الدالة الأسية.

3. بما أن $0 \le \lim_{x\to 0}\left|e^x-1\right| \le \lim_{x\to 0} xe^x=0$ فإن $\lim_{x\to 0} e^x=1$.

4. لدينا من أجل كل $m \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^m}=+\infty \;\wedge\; \lim_{x\to-\infty} x^m e^x=0\,.$$

لنثبت ذلك. ليكن $m \in \mathbb{N}$ مثبتا. يمكن أن نكتب من أجل $m \le n$

$$\forall x>0,\quad \sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}\ge\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}\,.$$

ومنه :

$$\forall x>0,\quad \frac{1}{x^m}\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}\ge\frac{x}{(m+1)!}\,.$$

بجعل n يؤول إلى لانهاية في الطرفين نجد

$$\forall x>0,\quad \frac{e^x}{x^m}\ge\frac{x}{(m+1)!}$$

وبجعل x يؤول إلى لانهاية في الطرفين نحصل على : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^m}=+\infty$.

ومن جهة أخرى، باعتبار $x<0$ وكتابة

$$x^m e^x=(-1)^m\frac{(-x)^m}{e^{-x}}$$

نستنتج بوضع $-x=y$ نحصل على

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)^m}{e^{-x}}=\lim_{y\to\infty}\frac{y^m}{e^y}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\frac{e^y}{y^m}}=0$$

ومنه $\lim_{x\to-\infty} x^m e^x=0$.

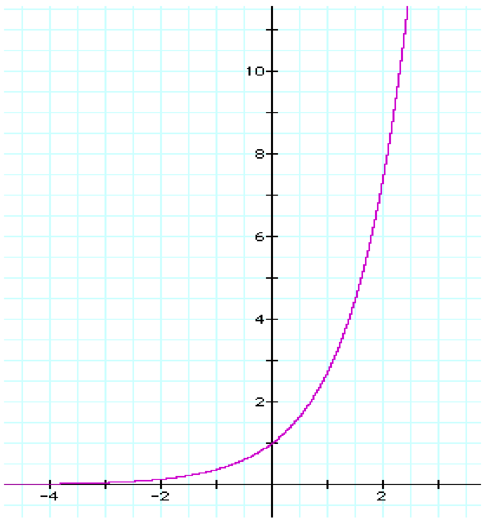
5. باعتبار $m=0$ في النهايتين السابقتين

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^m}=+\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty}x^m e^x=0$$

نجد :

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

وبناء على ذلك وعلى المعلومات السابقة ننشئ جدول تغيرات الدالة الأسية، ثمّ بيانها :



بيان الدالة الأسية

3. الدالة اللوغاريتمية

ينتج من خواص الدالة الأسية أنها ("مستمرة") ومتزايدة تماما من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}_*^+$. ولهذا فهي تقبل دالة عكسية متزايدة تماما من $\mathbb{R}_*^+$ نحو $\mathbb{R}$.

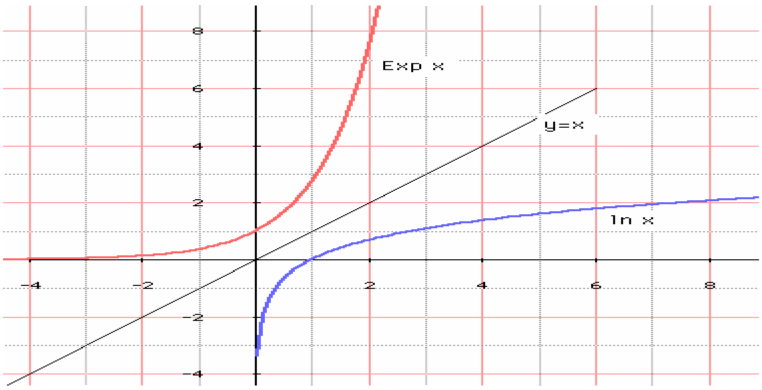
تعريف

تسمى الدالة العكسية للدالة الأسية الدالة اللوغاريتمية النبيرية. نرمز لهذه الدالة بـــ $x \mapsto \ln x$.
وهناك من يرمز لها بـــ $x \mapsto \mathrm{Log}x$.

ينتج جدول تغيرات هذه الدالة من جدول تغيرات الدالة الأسية، ومن ثم ينتج بيان الدالة اللوغاريتمية :

بيان الدالة اللوغاريتمية النبيرية

إليك بياني الدالتين الأسية واللوغاريتمية في نفس المعلم



بيانا الدالتين الأسية واللوغاريتمية في نفس المعلم

كما يمكننا استنتاج خواص الدالة اللوغاريتمية انطلاقا من خواص الدالة الأسية، ومن بينها :

$$\forall x > 0, \ \forall y > 0 \quad : \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

لأن

$$\forall x>0, \forall y>0 \quad : \quad xy = e^{\ln(xy)} \ \wedge \ e^{\ln x} \times e^{\ln y} = x \times y \ .$$

وهناك العلاقة

$$\forall x>0, \forall y>0 \quad : \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

التي نستنتجها من كون

$$\forall x>0, \forall y>0 \ : \ \frac{x}{y}=e^{\ln(\frac{x}{y})} \wedge \ e^{\ln x}\times e^{-\ln y} = e^{\ln x} \times \frac{1}{e^{\ln y}} = x \times \frac{1}{y}.$$

لدينا أيضا : $\ln 1=0$ لأنها تكافئ $1=e^{\ln 1}=e^{0}=1$.

يمكننا أيضا الحصول على

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^m}{x}=0 \ \wedge \ \lim_{x\to-\infty} x(\ln x)^m=0 .$$

ذلك أن :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^m}{x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{(\ln e^y)^m}{e^y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{(y)^m}{e^y}0 .$$

أما $\lim_{x\to-\infty} x(\ln x)^m=0$ فنستنتجها باستبدال x بـــ $\frac{1}{x}$ في $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^m}{x}=0$.

تلك هي بعض التطبيقات للمتتاليات التي تسمح بتعريف ودراسة العديد من الدوال المألوفة. وفي الكثير من الأحيان يتجلى أن استخدام المتتاليات في هذا الموضوع أوضح من اللجوء إلى غيرها من المفاهيم الرياضية.

8. أعمال موجهة

1. نصوص التمارين

تمرين 1

ما قولك في رتابة المتتاليات المعرفة بحدودها العامة كما يلي :

1) $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$ ، 2) $u_n=5n+\frac{1}{n+1}$ ، 3) $u_n=\frac{n+5}{4n-2}$ ،