الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

جامعة عبد الحفيظ بوالصوف
ملحقة المدرسة العليا للأساتذة
التحليل 1

السنة الجامعية: 2025-2026
الطور المتوسط - رياضيات
السنة الأولى

السلسلة الأولى

التمرين ١ لتكن $n \in \mathbb{N}^*$, نفرض أن $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, بحيث:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n$$

أثبت أن $x_k = 1$ من أجل كل $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

التمرين ٢ نفرض أن $a,\ b$ و c ثلاثة أعداد حقيقة موجبة تماما. بين أن:

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq 8a.b.c$$

التمرين ٣ ليكن $b \quad a$ أعداد ناطقة, نفرض وجود أعداد ناطقة $A,\ B$ و C تحقق:

$$A\sqrt{a} + B\sqrt{b} = C$$

أثبت أن $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, و $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

التمرين ٤ برهن ما يلي:

- $\forall x,\ y \in \mathbb{R}: \quad |\ |x| - |y|\ | \leq |x+y|.$
- $\forall x,\ y \in \mathbb{R}^*: \quad \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$
- $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x - 1 \leq E(x) \leq x.$
- $\forall x,\ y \in \mathbb{R}: \ x \leq y \implies E(x) \leq E(y).$
- $\forall x,\ y \in \mathbb{R}: \quad E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1.$

التمرين ٥ ١. لتكن A و B مجموعتين محدودتين و غير خاليتين من $\mathbb{R}$. نعرف

$$A+B=\{x+y \mid x\in A,\ y\in B\} \text{ و } -A=\{-x \mid x\in A\}$$

أثبت أن:

- $\inf(-A)=-\sup(A)$, $\sup(-A)=-\inf(A)$.
- $\forall a\in A,\ b\in B:\ a\leq b \implies \sup(A)\leq \inf(B)$.

٢. برهن أن $A\cup B$ مجموعة محدودة في $\mathbb{R}$ و أن:

- $\sup(A\cup B)=\max(\sup(A),\sup(B))$.
- $\inf(A\cup B)=\min(\inf(A),\inf(B))\cdots(*)$

٣. برهن أن $\sup(A)+\sup(B)$ حاد أعلى ل $A+B$, و أن:

- $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$.
- $\inf(A+B)=\inf(A)+\inf(B)\cdots(*)$

التمرين ٦ ١. أثبت أنه إذا كان $r\in\mathbb{Q}$ و $x\notin\mathbb{Q}$ فإن $x+r\notin\mathbb{Q}$, و إذا كان $r\neq 0$ فإن $r.x\notin\mathbb{Q}$.

٢. أثبت أن $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ عدد غير ناطق.

التمرين ٧ ١. باستعمال خاصية الحد الأعلى و الأدنى برهن ما يلي:

- $\sup A=0,\ \inf A=-1 \quad | \quad A=\left\{\dfrac{1}{n^2}-1,\quad n\in\mathbb{N}^*\right\}$.
- $\sup B=2,\ \inf B=0 \quad | \quad B=\left\{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2},\quad n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

٢. حدد العنصر الأكبر و الأصغر لكل مجموعة إن وجد.