3. تمهيدات لإنشاء مجموعة الأعداد الحقيقية

لنبدأ بتمهيدات لا بد منها كي نستعرض الإنشاء الجبري لمجموعة الأعداد الحقيقية.

تعريف (المجموعة المرتبة)

لتكن E مجموعة. تسمى كل علاقة "$\leq$" على E انعكاسية (أي : $x \leq x$ من أجل كل x في E) وضد متناظرة (أي : إذا كان $x \leq y$ و $y \leq x$ من أجل كل x و y في E فإن $x = y$) ومتعدية (أي: إذا كان $x \leq y$ و $y \leq z$ فإن $x \leq z$ من أجل من أجل x و y و z في E) علاقة ترتيب.

نقول عن E إنها مرتبة كليا إذا استطعنا كتابة $x \leq y$ أو $y \leq x$ من أجل كل عنصرين x و y في E. وإذا وجد عنصران (أو أكثر) x و y في E بحيث تكون العلاقتان $x \leq y$ و $y \leq x$ خاطئتين معا قلنا إن ترتيب E ترتيب جزئي.

مثال

* $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ مجموعات مرتبة ترتيبا كليا بعلاقة الترتيب المألوفة.

* لتكن E مجموعة و $\wp(E)$ مجموعة أجزائها. لنعرف علاقة ترتيب "$\leq$" على $\wp(E)$ بـ $A \leq B$ إن كان $A \subset B$. إنها علاقة ترتيب جزئية لأن هناك أجزاء من E بحيث $A \not\subset B$ و $B \not\subset A$ في آن واحد.

تعريف (حاد أعلى، أدنى؛ الحد الأعلى؛ الحد الأدنى؛ القيمة العظمى، الصغرى)

ليكن A جزءا من مجموعة مرتبة E بعلاقة ترتيب نرمز إليها بـــ"$\leq$" .

* نقول عن A إنها محدودة من الأعلى إذا وجد عنصر a من E بحيث

$$\forall x \in A, \quad x \leq a.$$

* إذا كانت A محدودة من الأعلى وكان حاد من الأعلى a لها ينتمي إلى A فإننا نسمي a قيمة عظمى لـــ A ، أي أن عنصرا a يمثل القيمة العظمى لـــ A إذا حقق :

$$a \in A, \quad \forall x \in A, \quad x \leq a.$$

– نرمز إلى القيمة العظمى لـــ A بـــ $\max A$.

* نقول إن لـــ A حدا أعلى إذا قبلت مجموعة الحواد العليا قيمة صغرى، وتسمى هذه القيمة (عند وجودها) الحد الأعلى لـــ A، ونرمز إليه بـــ $\sup A$.

* نقول عن A إنها محدودة من الأدنى إذا وجد عنصر b من E بحيث

$$\forall x \in A, \quad x \geq b.$$

* إذا كانت A محدودة من الأدنى وكان حاد من الأدنى b لها ينتمي إلى A فإن b يسمي قيمة صغرى لـــ A، أي أن عنصرا b يمثل القيمة الصغرى إذا حقق :

$$b \in A, \quad \forall x \in A, \quad x \geq b.$$

– نرمز إلى القيمة الصغرى لـــ A بـــ $\min A$.

* نقول إن لـــ A حدا أدنى إذا قبلت مجموعة الحواد الدنيا قيمة عظمى، وتسمى هذه القيمة (عند وجودها) الحد الأدنى لـــ A، ونرمز إليه بـــ $\inf A$.

ملاحظة

يمكن ألا يكون الحد الأعلى موجودا وكذلك الحال فيما يخص الحد الأدنى والقيمة العظمى والقيمة الصغرى. لكن عند وجود أيّ من هذه القيم فستكون وحيدة. الأمر ليس كذلك فيما يخص الحواد العليا والحواد الدنيا.

أمثلة

1) مجموعة الأعداد الطبيعية محدودة من الأدنى بـــ 0 ولدينا $\min \mathbb{N} = \inf \mathbb{N} = 0$، لكنها ليست محدودة من الأعلى. مجموعة الأعداد الصحيحة ليست محدودة من الأدنى وليست محدودة من الأعلى.

2) إذا اعتبرنا المجال $[1,3]$ من $\mathbb{R}$ فإننا نلاحظ أن $\min[1,3] = \inf[1,3] = 1$ و $\max[1,3] = \sup[1,3] = 3$.

3) إذا اعتبرنا المجال $]1,3]$ من $\mathbb{R}$ فإننا نلاحظ أن $\inf]1,3] = 1$ لكن $\min]1,3]$ غير موجود و $\max]1,3] = \sup]1,3] = 3$.

4) لتكن E مجموعة و $\wp(E)$ مجموعة أجزائها. نعرف على $\wp(E)$ علاقة ترتيب "$\leq$" بـــ $A \leq B$ إن كان $A \subset B$. ليكن $A = \{\{x\}, x \in E\}$. من الواضح أن A جزء من $\wp(E)$.

نلاحظ أن A محدودة من الأعلى بـــ E لأن

$$\forall \{x\} \in A, \quad \{x\} \subset E.$$

لكن $E \notin A$. إذن $E \neq \max A$.

لاحظ أن $\inf \wp(E) = \min \wp(E) = \varnothing$ و $\sup \wp(E) = \max \wp(E) = E$.

4. إنشاء مجموعة الأعداد الحقيقية

لنقدم الآن الطريقة المسلّمية لإنشاء مجموعة الأعداد الحقيقية.

تعريف (مسلمات)

مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة نرمز لها بـــ $\mathbb{R}$ نعرف عليها علاقة ترتيب "$\leq$" وقانونين داخليين هما الجمع "+" والضرب "." تحقق المسلمات التالية :

1. $(\mathbb{R},+,.)$ حقل تبديلي نرمز بـــ 0 و 1 للعنصرين الحياديين لقانوني الجمع والضرب على التوالي.
2. $(\mathbb{R},+,.)$ المزوّد بعلاقة الترتيب "$\leq$" حقل مرتب كليا. إذا كان $x \leq y$ مع $x \neq y$ نكتب $x < y$.
إذا كان $x < 0$ قلنا إن x سالب (أو سالب تماما) وإذا كان $0 < x$ قلنا إن x موجب (أو موجب تماما)، وإذا كان $x = 0$ قلنا إن x منعدم.
3. مسلمة الحد الأعلى : كل جزء من $\mathbb{R}$ غير خال ومحدود من الأعلى يقبل حدا أعلى.

ملاحظة

1) لاحظ أن المسلمتين الأولى والثانية ($(\mathbb{R},+,.)$ حقل تبديلي مرتب كليا) تنطبقان على مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$. وما يميّز $\mathbb{R}$ عن $\mathbb{Q}$ هو مسلمة الحد الأعـــلى التي لا يحققها الحقل التبـــديلي المرتب كليا $\mathbb{Q}$. مثـــال ذلك : $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 3\}$ هو جزء غير خال ومحدود من $\mathbb{Q}$، ويمكن حساب الحد الأعلى $\sup A$ فنجده $\sup A = \sqrt{3}$ علما أن $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. وهكذا نستخلص أن الحد الأعلى لـــ A غير موجود في $\mathbb{Q}$ وموجود في $\mathbb{R}$.

2) هناك إنشاء لمجموعة الأعداد الحقيقية انطلاقا من معرفتنا لمجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ يتم فيه التأكد من وجود مجموعة تتحقق فيها المسلمات السابقة. وهذا الإنشاء ينطلق من إنشاء مجموعات جزئية من $\mathbb{Q}$ تسمى "مقاطع". والمقطع هو كل جزء A غير خال من $\mathbb{Q}$ يتمتع بالخاصية التالية :

$$\forall x \in A,\ \exists x' \in \mathbb{Q} : x' < x \ \Rightarrow\ x' \in A .$$

وبعد ذلك نعرّف "المقطع المفتوح" وهو المقطع

$$\forall x \in A,\ \exists x' \in A : x' > x .$$

(مثال : $A=\{x\in\mathbb{Q}: x<2\}$ مقطع مفتوح في $\mathbb{Q}$).

ثم يصطلح على تسمية كل مقطع مفتوح عددا حقيقيا. وبالتالي فمجموعة المقاطع هي مجموعة الأعداد الحقيقية المطلوب إنشاؤها عبر المسلمات السالفة الذكر. وهذه الطريقة في إنشاء $\mathbb{R}$ تكافئ طريقة أخرى تسمى طريقة ديدكيند Dedekind تعتمد على ثنائيات أجزاء من $\mathbb{Q}$. فعندما يكون A و B جزءين من $\mathbb{Q}$ يحققان الشروط الثلاثة :

1) $A\cap B=\varnothing$

2) $A\cup B=\mathbb{Q}$

3) A مقطع

نقول إن الثنائية (A,B) قُطاعَة (coupure) ديدكيندية (نسبة لديدكيند). العدد الحقيقي في إنشاء ديدكيند هو قُطاعة ديدكندية ومجموعة القطاعات الديدكيندية هي مجموعة الأعداد الحقيقية.

إليك المسلمة التالية المسماة "مبدأ أرخميدس"

مبدأ أرخميدس

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \exists n\in\mathbb{N}\ :\ n>x\ .$$

نلاحظ أن هذه المسلمة محققة في $\mathbb{R}$ (المعرف بالمسلمات السابقة). ينتج من هذا المبدأ أن مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ (بصفتها جزءا من $\mathbb{R}$) ليست محدودة من الأعلى.

5. القيمة المطلقة، المجالات، الجزء الصحيح لعدد

إليك التعريفات التالية :

تعريف (القيمة المطلقة)

* إذا كان $x \in \mathbb{R}$ فإننا نعرّف القيمة المطلقة لـــ x، بـــ :

$$|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0, \\ -x & : x < 0. \end{cases}$$

تعريف (المجالات)

* إذا كان $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$ فإن المجموعات التالية

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x \leq b\},$$

$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} :\ a < x < b\},$$

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x < b\},$$

$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x \leq b\},$$

تسمى على التوالي مجالا مغلقا، مفتوحا، نصف مغلق (أو نصف مفتوح)، نصف مغلق (أو نصف مفتوح).

* كما نتبنّى الرموز التالية :

$$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R},$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x\},$$

$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} :\ x \leq b\},$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} :\ a < x\},$$

$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} :\ x < b\}.$$

هناك نظرية تعرف بمبدإ كانتور Cantor للمجالات المتداخلة نقدمها هنا على أن نعود إليها في فصل المتتاليات لإضافة بعض التفاصيل بشأنها.

نظرية (المجالات المتداخلة)

نعتبر متتالية مجالات متداخلة، أي مجالات $[a_n,b_n]$ تحقق :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad [a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]\;.$$

عندئذ يكون $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]\neq\varnothing$.

البرهان

نعتبر المجموعتين $A=\{a_n\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{b_n\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}\}$. لما كان الاحتواء $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$ محققا من أجل كل عدد طبيعي n فإننا نستنتج أن

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall m\in\mathbb{N},\quad a_m\leq b_n\;.$$

ومنه يأتي :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sup A=\sup_{m\in\mathbb{N}} a_m\leq b_n$$

وبالتالي فإن $\sup A$ حاد من الأدنى للمجموعة B. ومن ثم $\sup A\leq\inf B$ (لأن الحد الأدنى هو أكبر الحواد الدنيا). وهكذا نصل إلى العلاقة

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n\leq\sup A\leq\inf B\leq b_n$$

التي تعني أن :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad [\sup A,\inf B]\subset[a_n,b_n]$$

وعليه : $[\sup A,\inf B]\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]$. إذن $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]\neq\varnothing$.

ملاحظة

1) سنبيّن لاحقا (الفصل الموالي) أن نتيجة النظرية تسقط في حال المجالات غير المغلقة.

2) تفيد هذه النظرية في الكثير من البراهين. فعلى سبيل المثال، يمكن من خلالها إثبات أن مجموعة الأعداد الحقيقية غير عدودية، أي أنه لا يوجد تقابل بينها وبين مجموعة الأعداد الطبيعية.

لنتعرّف على الجزء الصحيح لعدد حقيقي. من أجل ذلك نلاحظ قيام المساواة $\mathbb{R}=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n,n+1[$ (تأكد من ذلك).

تعريف (الجزء الصحيح)

نكتب $\mathbb{R}=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n,n+1[$. وليكن $x\in\mathbb{R}$. يوجد عدد صحيح وحيد n_0 يحقق $n_0\le x<n_0+1$.
يسمى هذا العدد الجزء الصحيح للعدد x، ونرمز إليه عادة بـــ $n_0=[x]$ أو $n_0=E(x)$.

ملاحظة

من الواضح أن كل عدد حقيقي x يكتب على الشكل $x=[x]+\alpha$ حيث α عدد حقيقي يحقق $0\le\alpha<1$.

6. المجموعة المفتوحة والجوار

إن دراسة المتتاليات والدوال العددية وخواصها – مثل خاصية الاستمرار، أو قابلية الاشتقاق، أو المكاملة – تتطلب معرفة نمط معين من المفاهيم والخواص – تسمى الخواص الطبولوجية – التي تتمتع بها مجموعة الأعداد الحقيقية.

تعريف (المجموعة المفتوحة)

– ليكن A جزءا غير خال من $\mathbb{R}$. نقول عن A إنه جزء مفتوح من $\mathbb{R}$ إذا تحقق الشرط التالي :
من أجل كل عنصر x من A، يوجد مجال $I(x,\alpha)$ مركزه x ونصف طوله α بحيث $A\supset I(x,\alpha)$.
– المجموعة الخالية مجموعة مفتوحة (تعريفاً).

ملاحظة

كيف نثبت أن جزءا من $\mathbb{R}$ ليس مفتوحا؟ يكفي أن نجد عنصرا x من A بحيث مهما كان العدد الموجب α فإن $I(x,\alpha)\not\subset A$، حيث يرمز $I(x,\alpha)$ للمجال الذي مركزه x ونصف طوله α.

أمثلة

– كل مجال مفتوح $]a,b[$ يعتبر مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$، ذلك أنه من أجل كل عنصر x من $]a,b[$ يكفي اختيار α في التعريف السابق أصغر العددين $\frac{x-a}{2}$ و $\frac{b-x}{2}$ فيتبيّن أن $I(x,\alpha) \subset]a,b[$.

– من المجالات المفتوحة أيضا تلك التي تكتب على الشكل $]-\infty,a[$ أو $]b,+\infty[$.

– المجال $[a,b]$ ليس مفتوحا لأن $a \in [a,b]$ والمجال $I(a,\alpha)$ ليس محتويا في $[a,b]$ مهما كان العدد الموجب α.

– ليكن $a \in \mathbb{R}$. إن $\{a\}$ ليس مفتوحا. ذلك أنه مهما كان العدد الموجب α فإن $I(a,\alpha) \not\subset \{a\}$.

– $\mathbb{R}$ مفتوح لأن : مهما كان $x \in \mathbb{R}$ يوجد عدد موجب α بحيث $I(x,\alpha) \subset \mathbb{R}$. الواقع أن الاحتواء السابق محقق هنا من أجل كل عدد α.

نظرية (اتحاد وتقاطع المفتوحات)

1) كل اتحاد مفتوحات مجموعة مفتوحة.

2) كل تقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة مجموعة مفتوحة.

البرهان

1) نعتبر جماعة المجموعات المفتوحة $(A_j)_{j\in J}$ ونضع $A = \bigcup_{j\in J} A_j$. وليكن $x \in A$. إذن يوجد i من I بحيث $x \in A_i$. ولما كان A_i مفتوحا فإنه يوجد من أجل كل عنصر x من A_i عدد α موجب بحيث $I(x,\alpha) \subset A_i$. ومن ثم $A = \bigcup_{j\in J} A_j \supset A_i \supset I(x,\alpha)$. وهذا يعني أن A مفتوح.

2) نعتبر عددا منتهيا من المجموعات المفتوحة $(A_j)_{j=1,...,N}$ ونضع $A = \bigcap_{j=1,...,N} A_j$. إن كان A خاليا فإنه مفتوح حسب التعريف. لنفرض أنه غير منته، وليكن x عنصرا كيفيا من A. عندئذ يكون x عنصرا من كل مجموعة A_j. وبالتالي توجد أعداد موجبة $(\alpha_j)_{j=1,...N}$ بحيث $I(x,\alpha_j) \subset A_j$. نضع $\alpha = \min_{j=1,...N} \alpha_j$ (أي أن α هو أصغر الأعداد $(\alpha_j)_{j=1,...N}$). لاحظ أن $I(x,\alpha) \subset A_j$ من أجل كل j. ولذا : $I(x,\alpha) \subset A_j \subset \bigcap_{j=1,...,N} A_j = A$. ومنه المطلوب.

ملاحظة

لاحظ أن تقاطع عدد غير منته من المفتوحات ليس دائما مفتوحا. مثال ذلك المجالات التالية $I(a,\frac{1}{n})=\left]a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}\right[$ من أجل $n\in\mathbb{N}^*$ حيث a نقطة من $\mathbb{R}$.

لتوضيح ذلك نلاحظ أن $a\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}I(a,\frac{1}{n})$ ونتساءل عن وجود عنصر آخر ينتمي إلى هذا التقاطع. لنفرض جدلا أنه يوجد x يختلف عن a بحيث $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}I(a,\frac{1}{n})$. هذا يعني أن $x\in I(a,\frac{1}{n})$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$.

لكن هذا غير صحيح للأسباب التالية :

* إذا كان $x-a>0$ يمكننا إيجاد عدد طبيعي n_0 بحيث $x-a>\frac{1}{n_0}$ (يكفي اختيار n_0 مساويا لـــ $\left[\frac{1}{x-a}\right]+1$ حيث يرمز $\left[\frac{1}{x-a}\right]$ للجزء الصحيح لـــ $\frac{1}{x-a}$). وعندئذ يكون $x\notin I(a,\frac{1}{n_0})$. ومنه $x\notin\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}I(a,\frac{1}{n})$.

* إذا كان $x-a<0$ يمكننا إيجاد عدد طبيعي n_1 بحيث $x-a<-\frac{1}{n_1}$ (يكفي اختيار n_1 مساويا لـــ $\left[\frac{1}{a-x}\right]+1$ حيث يرمز $\left[\frac{1}{a-x}\right]$ للجزء الصحيح لـــ $\frac{1}{a-x}$). وعندئذ يكون $x\notin I(a,\frac{1}{n_1})$. ومنه $x\notin\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}I(a,\frac{1}{n})$.

خلاصة القول هي إذن أن $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}I(a,\frac{1}{n})=\{a\}$. وقد وضّحنا في الأمثلة السابقة أن المجموعة $\{a\}$ ليست مفتوحة.

تعريف (الجوار)

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$ و $V\subset\mathbb{R}$. نقول عن V إنه جوار لـــ x إذا وجد مفتوح U بحيث $x\in U\subset V$.

مثال

ليكن $]a,b[$ مجالا مفتوحا و $x \in]a,b[$. لاحظ الكتابة البديهية $]a,b[\subset]a,b[\ni x$ التي تثبت حسب التعريف السابق أن $]a,b[$ جوار لــ x. نستخلص أن كل مجال مفتوح هو جوار لكل نقطة منه.

ليكن U مفتوحا من $\mathbb{R}$ و $x \in U$. لاحظ الكتابة البديهية $U \subset U \ni x$ التي تثبت حسب التعريف السابق أن U جوار لــ x. نستخلص أن كل مفتوح من $\mathbb{R}$ يمثل جوارا لكل نقطة منه.

نظرية

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. نرمز بــ $\mathcal{V}(x)$ لمجموعة جوارات x. لدينا :

1) $\forall V \in \mathcal{V}(x),\ x \in V$.

2) $\left.\begin{array}{l} V \in \mathcal{V}(x), \\ V \subset W \end{array}\right\} \Rightarrow W \in \mathcal{V}(x)$.

3) تقاطع عدد منته من الجوارات لــ x جوار لــ x.

4) أيُّ اتحاد جواراتٍ لــ x هو جوار لــ x.

البرهان

متروك للقارئ.

تمرين

أثبت أنه يمكن اختيار U في التعريف السابق مساويا لمجال مفتوح.

ملاحظة

من الناحية العملية فإن الجوارات التي نستخدمها في معظم الأحيان هي المجالات المفتوحة.

7. الملاصقة والمجموعة المغلقة

تعريف (النقطة الملاصقة)

> ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$. نقول عن نقطة x من $\mathbb{R}$ إنها نقطة ملاصقة لـــ A إذا كان :
> $$\forall V \in \mathcal{V}(x),\ \ V \cap A \neq \varnothing .$$
> تسمى مجموعة النقاط الملاصقة للجزء A من $\mathbb{R}$ ملاصقة A، ونرمز لها عادة بـــ $\overline{A}$.

مثال

ملاصقة المجال $]a,b[$ هي $[a,b]$ ذلك أنه إذا كان x عنصرا من $[a,b]$ وكان V جوارا لـــ x فإنه يوجد مجال $I(x,\alpha) \subset V$. لاحظ أن $I(x,\alpha) \cap]a,b[\neq \varnothing$: لتوضيح ذلك نقول إن هناك 3 حالات هي :

- الحالة الأولى : إما $a < x < b$. عندئذ فإن $x \in I(x,\alpha) \cap]a,b[$ ... الواقع أن لدينا أكثر من ذلك : $]c,d[\subset I(x,\alpha) \cap]a,b[$ حيث c هو أكبر العددين a و $x-\alpha$، و d هو أصغر العددين b و α. وبالتالي : $I(x,\alpha) \cap]a,b[\neq \varnothing$. ومنه $V \cap]a,b[\neq \varnothing$.
- الحالة الثانية : وإما $x = a$. عندئذ فإن $]a,d[\subset I(x,\alpha) \cap]a,b[$ حيث d هو أصغر العددين b و α. وبالتالي : $I(x,\alpha) \cap]a,b[\neq \varnothing$. ومنه $V \cap]a,b[\neq \varnothing$.
- الحالة الثالثة : وإما $x = b$. عندئذ فإن $]c,b[\subset I(x,\alpha) \cap]a,b[$ حيث $c = \max(\alpha,b)$. وبالتالي : $I(x,\alpha) \cap]a,b[\neq \varnothing$. ومنه $V \cap]a,b[\neq \varnothing$.

وهكذا يتضح أن $[a,b]$ محتوي في المجموعة الملاصقة لـــ $]a,b[$. ومن جهة أخرى إذا كان x عنصرا لا ينتمي إلى $[a,b]$، مثلا $x < a$ فإن الحوار V لـــ x المتمثل في المجال المفتوح $I(x,\alpha)$ لا يلتقي بــ $]a,b[$ عندما يكون $\alpha = \dfrac{x+a}{2}$، أي أن $I(x,\alpha) \cap]a,b[= \varnothing$. ومنه فإن كل $x < a$ لا ينتمي إلى ملاصقة $]a,b[$. بنفس الطريقة نبين أن كل $x > b$ لا ينتمي إلى ملاصقة $]a,b[$ (نأخذ $\alpha = \dfrac{x+b}{2}$ بدل $\alpha = \dfrac{x+a}{2}$). خلاصة القول إن ملاصقة المجال $]a,b[$ هي $[a,b]$.

لاحظ أن استدلالا مماثلا يبين أن ملاصقة المجال $]a,b[$ هي $[a,b]$. وكذلك الأمر فيما يخص $[a,b]$.

نظرية (الملاصقة والاحتواء)

ليكن A ، B جزءين من $\mathbb{R}$ و $\overline{A}$ ، $\overline{B}$ ملاصقتاهما. لدينا :
1) $A \subset \overline{A}$.
2) $\overline{A} \subset \overline{B} \Leftarrow A \subset B$.

البرهان

1) ليكن x عنصرا من A. من أجل كل جوار V لــ x فإن $x \in V \cap A$. ومنه $V \cap A \neq \varnothing$.
إذن $x \in \overline{A}$.

2) ليكن $x \in \overline{A}$. عندئذ، من أجل كل جوار V لــ x فإن $V \cap A \neq \varnothing$. وبما أن $A \subset B$ فإن $V \cap B \neq \varnothing$. وعليه : $x \in \overline{B}$. إذن $\overline{A} \subset \overline{B}$.

تعريف (المجموعة المغلقة)

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$. نقول عن A إنه جزء مغلق من $\mathbb{R}$ إذا كانت $\complement_{\mathbb{R}} A$ متممته في $\mathbb{R}$ مجموعة مفتوحة.

ملاحظة

لما كانت متممة متممة مجموعة هي المجموعة ذاتها $\left(A = \complement_{\mathbb{R}}\left(\complement_{\mathbb{R}} A\right)\right)$ فإن متممة مغلق جزء مفتوح، أي أن لدينا في واقع الأمر الإستلزمان :

A مفتوح $\Leftarrow$ $\complement_{\mathbb{R}} A$ مغلق.

A مغلق $\Leftarrow$ $\complement_{\mathbb{R}} A$ مفتوح.

أمثلة

* نعلم – تعريفًا – أن $\varnothing$ جزء مفتوح. وبالتالي فإن متممته $\complement_{\mathbb{R}} \varnothing$ مغلقة. وهذه المتممة هي $\mathbb{R}$. إذن $\mathbb{R}$ مغلق. إذن فإن $\mathbb{R}$ مفتوح ومغلق في آن واحد.

* يأتي مما سبق – بالمرور إلى المتممة – أن المجموعة الخالية $\varnothing$ هي أيضا مفتوحة ومغلقة في آن واحد.

* نعلم أن $]a,b[$ مفتوح. إذن $\complement_{\mathbb{R}}]a,b[$ مغلق، أي أن الاتحاد $]-\infty,a] \cup [b,+\infty[$ جزء مغلق من $\mathbb{R}$.

* نعلم أن $]-\infty,a[$ و $]b,+\infty[$ مفتوحان. ولذا فالاتحاد $]-\infty,a[\cup]b,+\infty[$ مفتوح. ومنه يأتي أن المتممة $\complement_{\mathbb{R}}\left(]-\infty,a[\cup]b,+\infty[\right)$ مغلقة. لاحظ أن $[a,b]=\complement_{\mathbb{R}}\left(]-\infty,a[\cup]b,+\infty[\right)$. ومنه $[a,b]$ مغلق.

* كل مجال من الشكل $]-\infty,a]$ أو $[b,+\infty[$ مجال مغلق لأن متممة $]a,+\infty[$ (وهي $]-\infty,a]=\complement_{\mathbb{R}}]a,+\infty[$) مفتوحة، وكذلك متممة $[b,+\infty[$ (وهي $]-\infty,b[=\complement_{\mathbb{R}}[b,+\infty[$) مفتوحة.

* كل جزء $\{a\}$ مجموعة مغلقة، ذلك أن $\{a\}=\complement_{\mathbb{R}}\left(]-\infty,a[\cup]a,+\infty[\right)$ علما أن $]-\infty,a[$ و $]a,+\infty[$ مفتوحان وكذلك $]-\infty,a[\cup]a,+\infty[$.

نظرية (تقاطع واتحاد مغلقات)

1) كل اتحاد منته لمجموعات مغلقة مجموعة مغلقة.

2) كل تقاطع (منته أو غير) من المجموعات المغلقة مجموعة مغلقة.

البرهان

البرهان ينبني على العلاقات التالية المعروفة في نظرية المجموعات :

$$\complement_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{j\in J}A_j\right)=\bigcap_{j\in J}\left(\complement_{\mathbb{R}}A_j\right)\text{ ،}$$

$$\complement_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)=\bigcup_{j\in J}\left(\complement_{\mathbb{R}}A_j\right)$$

1) نعتبر عددا منتهيا من المجموعات المغلقة $(A_j)_{j=1,\dots,N}$. ونضع $A=\bigcup_{j=1,\dots,N}A_j$. عندئذ :

$$\complement_{\mathbb{R}}A=\complement_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{j=1,\dots,N}A_j\right)=\bigcap_{j=1,\dots,N}\left(\complement_{\mathbb{R}}A_j\right)$$

ونحن نعلم أن كل $\complement_{\mathbb{R}}A_j$ مفتوح وأن كل تقاطع منته لمفتوحات يساوي مفتوحا. ومن ثمّ فإن التقاطع $\bigcap_{j=1,\dots,N}\left(\complement_{\mathbb{R}}A_j\right)$ مفتوح. وهكذا فإن $\complement_{\mathbb{R}}A$ مفتوح، أي أن A مغلق.

2) نعتبر عددا منتهيا أو غير منته من المجموعات المغلقة $(A_j)_{j\in J}$. ونضع $A=\bigcap_{j\in J}A_j$. عندئذ :

$$\complement_{\mathbb{R}}A=\complement_{\mathbb{R}}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)=\bigcup_{j\in J}\left(\complement_{\mathbb{R}}A_j\right).$$

ونحن نعلم أن $\complement_{\mathbb{R}} A_j$ مفتوح وأن كل اتحاده لمفتوحات يساوي مفتوحا. ومن ثمّ فإن الاتحاد $\bigcup_{j\in J}\left(\complement_{\mathbb{R}} A_j\right)$ مفتوح. وهكذا فإن $\complement_{\mathbb{R}} A$ مفتوح، أي أن A مغلق.

ملاحظة

كنا لاحظنا أن تقاطع عدد غير منته من المفتوحات ليس دائما مفتوحا. وضربنا مثلا على ذلك بالمجالات $I(a,\frac{1}{n}) = \left]a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}\right[$ من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ حيث a نقطة من $\mathbb{R}$. إن مثيلة هذه الملاحظة فيما يخص المغلقات هي أن اتحاد عدد غير منته من المغلقات ليس دائما مغلقا. مثال ذلك الاتحاد $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$.
لاحظ أن كل عدد x من المجال $[0,1[$ ينتمي إلى أحد المجالات $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ (الواقع أنه ينتمي إلى كل المجالات $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ التي يكون فيها $n > \frac{1}{1-x}$). ومنه $[0,1[\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$. لاحظ بعد ذلك أن أي عدد x لا ينتمي إلى $[0,1[$ لا يمكن أن ينتمي لأحد المجالات $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ مهما كان العدد الطبيعي $n \neq 0$. ولذا فإن $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$. إذن $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,1-\frac{1}{n}\right] = [0,1[$ علما أن $[0,1[$ ليس مغلقا.

لدينا في الــواقع النظرية التالية التي تربط بين الاتحاد والتقاطع والملاصقة والتي نترك برهانها للقارئ :

نظرية (ملاصقة الاتحاد والتقاطع)

ليكن A و B جزئين من $\mathbb{R}$. لدينا :
1) A مغلق $\Leftrightarrow A = \overline{A}$،
2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$،
3) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

ملاحظة

لاحظ أن $\overline{A\cap B}\neq \overline{A}\cap\overline{B}$. خذ مثلا $A=]0,1[$ و $B=]1,2[$. فستجد أن $\overline{A}=[0,1]$ و $\overline{B}=[1,2]$. ومنه $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1\}$. ومن جهة أخرى $A\cap B=\varnothing$، وعليه $\overline{A\cap B}=\varnothing$ لأن $\varnothing$ مجوعة مغلقة. خلاصة القول في هذا المثال أن $\overline{A}\cap\overline{B}\not\subset\overline{A\cap B}$.

8. المحدودية

تعريف (المجموعات المحدودة)

ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$. نقول عن A إنه محدود إن وجد مجال $[a,b]$ بحيث $A\subset[a,b]$.

أمثلة

* كل مجال مغلق من الشكل $[a,b]$ جزء محدود.
* $\mathbb{N}$ ليس محدودا.
* $[1,+\infty[$ مجال (مغلق) غير محدود.

نظرية (المحدودية والاتحاد والملاصقة)

لدينا :

1) كل اتحاد منته لمجموعات محدودة مجموعة محدودة.
2) ليكن A جزءا من $\mathbb{R}$ و B جزءا محدودا (من $\mathbb{R}$) بحيث $A\subset B$. عندئذ يكون A محدودا.
3) إذا كان A جزءا محدودا فإن ملاصقته $\overline{A}$ محدودة أيضا.

البرهان

1. يكفي أن نبين بأن الخاصية محققة من أجل جزءين محدودين. ليكن A و B جزءين محدودين من $\mathbb{R}$. يوجد، حسب التعريف، مجالان $[a,b]$ و $[a',b']$ بحيث $A\subset[a,b]$ و $B\subset[a',b']$. من الواضح أن $A\cup B\subset[\alpha,\beta]$ حيث α هو أصغر العددين a و a' و β هو أكبر العددين b و b'. ومنه تأتي محدودية $A\cup B$.

2. الخاصية واضحة لأن العلاقة $A \subset B$ مع محدودية B تبيّن وجود مجال $[a,b]$ يحقق $A \subset B \subset [a,b]$. وهو ما يبيّن محدودية A.

3. بما أن A محدود فإنه يوجد مجال $[a,b]$ يحقق $A \subset [a,b]$، علما أن :

$$\begin{cases} A \subset [a,b] \;\Rightarrow\; \overline{A} \subset \overline{[a,b]}, \\ \overline{[a,b]} = [a,b]. \end{cases}$$

ومنه نستنتج : $\overline{A} \subset [a,b]$. ولذلك فإن $\overline{A}$ محدودة.

نظرية (الخاصية المميزة للحدين الأعلى والأدنى)

ليكن A جزءا محدودا من $\mathbb{R}$ و $a = \sup A$ و $b = \inf A$. عندئذ :
1) لدينا الخاصية المميزة للحد الأعلى :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A :\ a - \varepsilon < x \leq a$.
2) لدينا الخاصية المميزة للحد الأدنى :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A :\ b \leq y < b + \varepsilon$.

البرهان

* ليكن $\varepsilon > 0$. نضع $M = a - \varepsilon$ فنلاحظ أن $M < a$. ومن جهة أخرى نعلم أن a تمثل الحد الأعلى. وعليه فهو أصغر الحواد العليا. وبالتالي فإن M ليس حادا من الأعلى. إذن يوجد عنصر x من A بحيث $M < x$. ومن جهة أخرى $x \leq a$ لأن a حاد من الأعلى لـــ A. وهذا نصل إلى المطلوب، وهو

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A :\ a - \varepsilon < x \leq a .$$

* بنفس الطريقة نثبت الخاصية المميزة للحد الأدنى.

9. العدودية

نوجز هنا العناصر الأولى لمفهوم العدودية.

تعريف

نقول عن مجموعة إنها عدودية إذا استطعنا إيجاد تقابل بينها وبين $\mathbb{N}$.

نظرية

إن $\mathbb{R}$ ليس عدوديا.

البرهان

نفرض (بالخلف) أن $[0,1]$ عدودي، أي أنه يوجد تقابل $f:\mathbb{N}\to[0,1]$. ونكتب المجال $[0,1]$ على شكل اتحاد 3 مجالات من نفس الطول :

$$[0,1]=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right].$$

من المؤكد أن $f(0)$ لا ينتمي إلى أحد المجالات الواردة في الطرف الثاني من المساواة السابقة. نرمز بـــ I_0 لذلك المجال. نفرض أننا أنشأنا جملة من المجالات $(I_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ بحيث $f(i)\notin I_i$ من أجل $0\le i\le n$. نفكك كما فعلنا آنفا المجال I_n إلى 3 مجالات من نفس الطول فنصل على مجال مغلق I_{n+1} يحقق $f(n+1)\notin I_{n+1}$.

وهكذا أنشأنا بالتدريج متتالية من المجلات المغلقة المتداخلة $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $f(n)\notin I_n$. عندئذ يتبيّن من نظرية المجالات المتداخلة

$$\bigcap_{n\infty\mathbb{N}} I_n=[0,1]\cap\bigcap_{n\infty\mathbb{N}} I_n=f(\mathbb{N})\cap\bigcap_{n\infty\mathbb{N}} I_n=\varnothing.$$

وهذا تناقض. ينتج منه أن $[0,1]$ غير عدودي. وعليه فإن $\mathbb{R}$ غير عدودي.

ملاحظة

إذا استطعنا إيجاد تقابل بين $\mathbb{R}$ ومجموعة قلنا أن لهذه المجموعة "قوة المستمر" أو "قدرة المستمر".
لاحظ أن المجموعات $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ عدودية وبالتالي فليس لها قوة المستمر.

تعريف (العدد الجبري، العدد المتسامي)

* نسمى معادلة جبرية كل معادلة من الشكل التالي، حيث $(a_p)_{p=0,\dots,n}$ أعداد ناطقة :

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0$$

* ليكن $x \in \mathbb{R}$. نقول عن x إنه عدد جبري إذا كان جذرا لمعادلة جبرية.
* ليكن $x \in \mathbb{R}$. نقول إن x عدد متسام إن لم يكن عددا جبريا.

أمثلة

– كل عدد ناطق عدد جبري. وكذلك الأعداد $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\frac{1}{\sqrt{5}}$ لأنها حلول للمعادلات الجبرية $x^2 - 2 = 0$، $x^2 - 3 = 0$، $x^2 - \frac{1}{5} = 0$ ، على التوالي.

– العدد π عدد متسام، وكذلك أساس اللوغاريتم النبيري $e = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ عدد متسام.

نظرية

مجموعة الأعداد الجبرية الحقيقية مجموعة عدودية.
مجموعة الأعداد المتسامية الحقيقية مجموعة غير عدودية.

ملاحظة

ينتج من ذلك أن عدد الأعداد المتسامية أضخم من عدد الأعداد الجبرية.