



N° Réf :.....

Abdelhafid Boussouf University – Mila

Faculty of Mathematics and Computer Sciences

Department of mathematics

Submitted for the degree of Master
In: Mathematics

Specialty: Applied Mathematics (Fundamental Mathematics)
Mathematical Modeling and Decision-Making Techniques

Title

Presented by: -

-

Defended on .../06/2026

In front of the jury

Smail Kaouache

MCA

Abdelhafid Boussouf U. of Mila

Chairman

Yacine Halim

Prof

Abdelhafid Boussouf U. of Mila

Supervisor

Mohamed Kecies

MCB

Abdelhafid Boussouf U. of Mila

Examiner

Academic year: 2023/2024

Acknowledgements

Abstract

This dissertation explores several classes of nonlinear difference equations and nonlinear fuzzy difference equations, with a primary emphasis on the qualitative properties of their solutions.

The work begins with a comprehensive study of nonlinear higher-order fuzzy difference equations. Under suitable initial conditions, we prove the existence and uniqueness of positive fuzzy solutions. In addition, we establish conditions ensuring their boundedness, persistence, and convergence to a single equilibrium point. The convergence rate is analyzed, and numerical simulations are provided to support and validate the theoretical results.

The concluding part addresses a three-dimensional nonlinear system of difference equations involving arbitrary constants and non-identical parameters. By performing a linearization around its equilibrium, we investigate the local dynamics and derive sufficient criteria for asymptotic stability. Moreover, it is shown that the solutions may exhibit oscillatory, bounded, or persistent behaviors depending on the parameter choices and initial conditions.

Keywords: fuzzy difference equations, fuzzy numbers, systems of difference equations, equilibrium points, local stability, asymptotic behavior, rate of convergence.

Résumé

Cette thèse examine plusieurs classes d'équations aux différences non linéaires et d'équations aux différences floues non linéaires, en mettant l'accent sur les propriétés qualitatives de leurs solutions.

Le travail débute par une étude approfondie des équations aux différences floues non linéaires d'ordre supérieur. Sous des conditions initiales appropriées, nous établissons l'existence et l'unicité de solutions floues positives. Nous déterminons également les conditions garantissant leur bornitude, leur persistance et leur convergence vers un point d'équilibre unique. Le rythme de convergence est analysé, et des simulations numériques sont proposées afin d'appuyer et de valider les résultats théoriques.

La dernière partie est consacrée à un système non linéaire tridimensionnel d'équations aux différences comportant des constantes arbitraires et des paramètres distincts. En linéarisant le système autour de son équilibre, nous étudions la dynamique locale et formulons des critères suffisants de stabilité asymptotique. De plus, il est montré que les solutions peuvent présenter des comportements oscillatoires, bornés ou persistants, en fonction du choix des paramètres et des conditions initiales.

Mots-clés: équations aux différences floues, nombres flous, systèmes d'équations aux différences, points d'équilibre, stabilité locale, comportement asymptotique, taux de convergence.

ملخص

تُكرّس هذه الأطروحة لدراسة عدد من الفئات من معادلات الفروق غير الخطية ومعادلات الفروق الضبابية غير الخطية، مع التركيز على التحليل النوعي لسلوك حلولها.

يُعنى هذا العمل بالتحليل الديناميكي لمعادلات الفروق الضبابية من الرتب العليا، حيث يتم إثبات وجود ووحداية الحلول الضبابية الموجبة تحت شروط ابتدائية ملائمة. كما يتم برهان محدودية هذه الحلول واستمراريتها وتقاربها نحو نقطة توازن وحيدة. علاوةً على ذلك، يُبحث في معدل التقارب، وتُقدّم أمثلة عديدة لتوضيح النتائج النظرية ودعمها بالتطبيقات الحسابية.

أما في الجزء الأخير من الأطروحة، فيُخصّص لدراسة نظام غير خطي ثلاثي الأبعاد من معادلات الفروق يتميّز بمعاملات كيفية ووسائط غير متماثلة. ومن خلال تحليل خطي للنظام حول نقطة التوازن، تُدرس الديناميكيات المحلية وتُستخلص شروط كافية للاستقرار المحلي. كما يُبيّن أن الحلول تُظهر سلوكًا تذبذبًا محدودًا ومستمرًا، يتأثر بقيم الوسائط وبطبيعة الشروط الابتدائية.

الكلمات الأساسية: معادلات الفروق الضبابية، الأعداد الضبابية، أنظمة المعادلات الفرقية، نقاط التوازن، الاستقرار المحلي، السلوك التقاربي، معدل التقارب

Table of contents

introduction	1
1 Preliminaries and definitions	2
1.1 Nonlinear difference equations	2
1.2 Première équation	2
1.2.1 titre 2	2
2 Titre chapire 2	5
3 Titre chapire 3	6
Conclusion	7

Introduction

Preliminaries and definitions

1.1 Nonlinear difference equations

1.2 Première équation

1.2.1 titre 2

Definition 1.2.1 *La suite de Fibonacci est la suite $\{F_n\}_{n \geq 0}$ telle que $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \tag{1.1}$$

pour tout $n \geq 0$.

i) *L'identité de Cassini:* Pour $n > 0$, on a

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n. \tag{1.2}$$

ii) *L'identité d'Ocagne:* Pour $n, r \in \mathbb{N}$, on a

$$F_{n+r}F_{n+1} - F_{n+r+1}F_n = (-1)^n F_r. \tag{1.3}$$

iii) *L'identité de Johnson*: Pour k, l, m, n et $r \in \mathbb{N}$ tels que $k + l = m + n$,

$$F_k F_l - F_m F_n = (-1)^r (F_{k-r} F_{l-r} - F_{m-r} F_{n-r}). \quad (1.4)$$

Lemma 1.2.1 [?] yyyyyyyyyyy

Theorem 1.2.1 Soit $\{x_n\}_{n \geq -k}$ une solution de (??). Alors pour $n = 0, 1, \dots$,

$$x_{(k+1)n+i} = \frac{W_{n+1} + W_n x_{i-(k+1)}}{W_{n+2} + W_{n+1} x_{i-(k+1)}} q, \quad i = 1, 2, \dots, k+1.$$

Proof. On a

$$x_1 = \frac{q}{p + x_{-k}},$$

donc le résultat est vérifié pour $n = 0$. Supposons que $n > 0$ et que notre proposition est vraie pour $n - 1$. C'est à dire,

$$x_{(k+1)n-(k+1)+i} = \frac{W_n + W_{n-1} x_{i-(k+1)}}{W_{n+1} + W_n x_{i-(k+1)}} q.$$

Maintenant, il découle de Eq.(??) que

$$\begin{aligned} x_{(k+1)n+i} &= \frac{q}{p + x_{(k+1)-(1+k)+i}} \\ &= \frac{q}{p + \frac{W_n + W_{n-1} x_{i-(k+1)}}{W_{n+1} + W_n x_{i-(k+1)}}} \\ &= \frac{q}{\frac{pW_{n+1} + qW_n + (pW_n + qW_{n-1})x_{i-(k+1)}}{W_{n+1} + W_n x_{i-(k+1)}}}. \end{aligned}$$

Donc, on a

$$x_{(k+1)n+i} = \frac{W_{n+1} + W_n x_{i-(k+1)}}{W_{n+2} + W_{n+1} x_{i-(k+1)}} q.$$

■

Corollary 1.2.1 *tttttttttttttttttttttttt*

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} x_{(k+1)n+i} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_{n+1} + W_n x_{i-(k+1)}}{W_{n+2} + W_{n+1} x_{i-(k+1)}} q \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q + \frac{q}{\Phi_+} x_{i-(k+1)}}{\Phi_+ + x_{i-(k+1)}} \\
 &= \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.
 \end{aligned}$$

1. *yyyyyyyyyyy gggggggggggggg*
2. *rrrrrrrrrrrrrrrf hn*
3. *tttt dd dddd*

Chapter 2

Titre chapitre 2

Chapter 3

Titre chapitre 3

Conclusion

Bibliography

- [1] T. D. Alharbi, Y. Halim, Multi-Dimensional Rational Recurrence Models: Local Analysis with Nonlinear Effects, *AIMS Mathematics*, **10**(9), 20050–20065(2025),
- [2] S. Elaydi, An introduction to difference equations. Springer, New York (2005).
- [3] I. Dekkar, Variations sur les équations aux différences (non) autonomes, Doctoral Thesis, University of Jijel, (2017).