المحاضرة الثانية: قانون بواسون

(قانون الظواهر النادرة، قانون الاحتمالات الصغيرة)

تمهيد:

ينسب هذا القانون إلى مكتشفه سيمون دنيس بواسون عام 1837، ويعتبر قانون بواسون من التوزيعات الاحتمالية المنقطعة الهامة، ويعتمد عليه في المجالات العلمية التي ينصب الاهتمام فيها على إيجاد توزيعات عدد المرات التي تشاهد فيها ظاهرة عشوائية خلال وحدة معينة، ومثال ذلك:

- عدد العملاء الذين يصلون إلى أحد البنوك كل دقيقة.
- عدد الأخطاء في الأعمال (كتابة، طباعة) في كل صفحة.
- عدد حوادث المرور في مدينة ما خلال فترة زمنية معينة.
- عدد المكالمات الهاتفية في فترة زمنية معينة.
- عدد آلات الإنتاج التي تتعطل في مصنع خلال فترة زمنية معينة.

وتوضح الأمثلة السابقة الذكر مدى تنوع واتساع استخدام هذا التوزيع في حياتنا العملية، ويطلق على التجربة التي تقدم لنا قيما عددية لمثل هذه المتغيرات إسم التجربة البواسونية التي تتميز بالخصائص التالية:

- عدد المحاولات كبير جدا (لا محدود أو لا نهائي).
- احتمال النجاح صغير ويقترب من الصفر، واحتمال الفشل يقترب من الواحد الصحيح.
- احتمال النجاح ثابت من محاولة إلى أخرى.

1. دالة الاحتمال:

يهتم قانون بواسون بصورة خاصة بعدد حالات النجاح في الوحدة (زمن، مكان، طول، حجم...الخ)، ويسمى المتغير الذي يحقق هذه الخواص بمتغير بواسون أو المتغير البواسوني، وتعرف دالة الاحتمال لهذا التوزيع كما يلي:

$$p(X=x)=\begin{cases} e^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^x}{x!} & x=0,1,2,\dots\dots \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

حيث:

λ: هي معلمة التوزيع، وهي مقدار ثابت.

e: أساس اللوغاريتم الطبيعي.

x: قيم المتغير العشوائي X.

ويمكن التأكد من أن دالة الاحتمال لتوزيع بواسون هي دالة احتمال كما هو مبين من خلال ما يلي:

$$\forall\, x \,/\, x \in \aleph \quad : \quad f(x) \geq 0$$

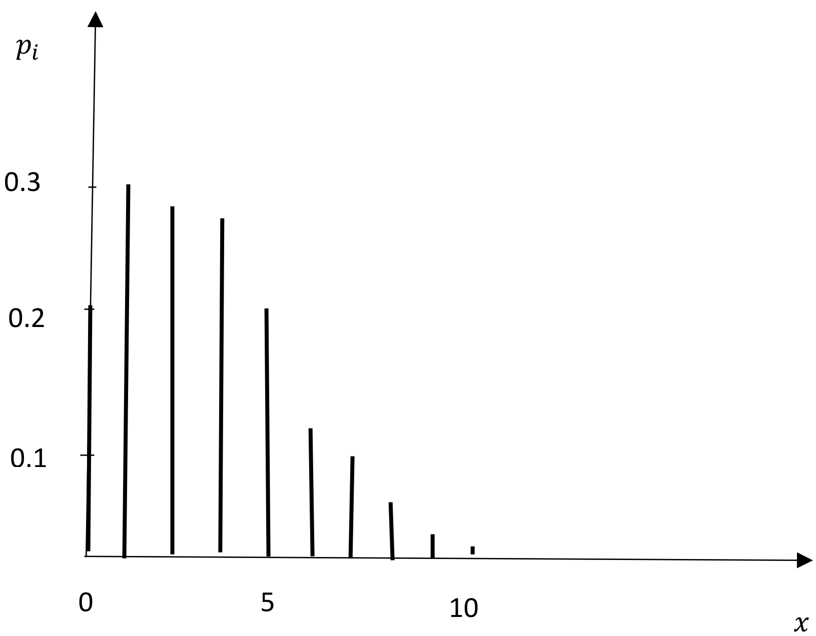
$$\sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^0 = 1$$

ملاحظة:

$\frac{\lambda^x}{x!}$: هو فك الحد العام التسلسلي التام للمقدار e^{λ} .

أما فيما يخص التمثيل البياني لدالة الاحتمال لتوزيع بواسون فعلى العموم يكون التمثيل البياني ملتويا نحو اليمين (إلتواء موجب)، وكلما زادت قيمة λ فإن الشكل يقترب من التماثل كما تقل المسافة بين أي نقطتين متتاليتين، وكلما كبر عدد المحاولات كلما أصبحت نقاط المنحنى متتالية أكثر تلاصقا، كما يصبح المنحنى مستمرا ويقترب من التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي.

الشكل 1: التمثيل البياني لتوزيع بواسون

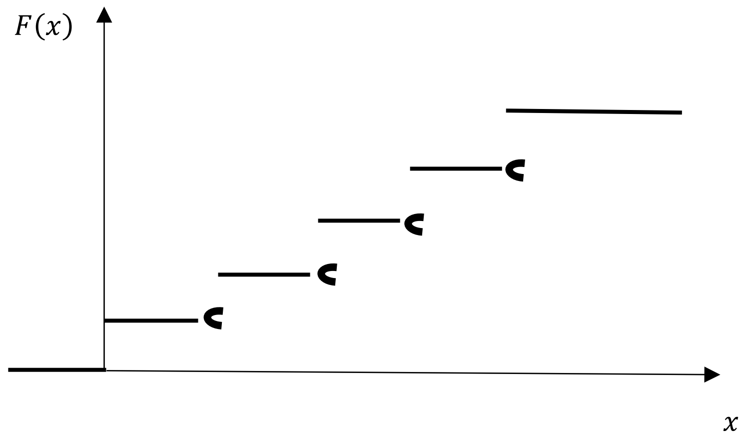


2. دالة التوزيع لقانون بواسون:

تعرف دالة التوزيع لقانون بواسون وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$p(X \leq x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

ويأخذ الشكل البياني المقابل لتابع التوزيع شكل السلم كاي توزيع متقطع، وهذا ما يعكسه الشكل الموالي:



ملاحظة:

هناك الكثير من المراجع التي تدرج في نهايتها ملاحق بها جداول تعكس توزيع الاحتمالات التراكمية، أي قيم تابع التوزيع عند مجموعة من التجارب والاحتمالات.

مثال:

يوضح الجدول الموالي القيم الاحتمالية التراكمية لـ x من أجل بعض القيم لـ λ:

x \ λ	0.1	0.2	0.3
0	0.9048	0.8187	0.7408
1	0.9953	0.9825	0.9631
2	0.9998	0.9988	0.9964
3	1	0.9999	0.9997
4		1	1

فمن أجل القيم $\lambda = 0.1$ و $x = 1$ فإن: $p(X \leq 1) = 0.9953$

3. المميزات العددية

يمكن توضيح المميزات العددية لتوزيع بواسون من خلال مايلي:

.1.3 التوقع الرياضي:

يتطلب تطبيق قانون بواسون معرفة قيمة التوقع الرياضي المساوي لقيمة المعلمة λ كما يتضح من خلال الآتي:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda}$$

$$E(X) = \lambda$$

.2.3 التباين:

يعرف التباين وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x^1 \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} + e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

$$V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$V(X) = \lambda$$

4. الدالة المولدة للعزوم:

تعرف الدالة المولدة للعزوم لهذا التوزيع كما يلي:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_x(T) &= (e^{xt}) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{xt} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} e^{xt} \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \\
&= e^{-\lambda+\lambda e^t}
\end{aligned}
$$

$$M_x(T) = e^{\lambda(e^t-1)}$$