Centre universitaire Abedelhafid Boussouf – Mila
Institut des sciences et technologie
Département de mathématiques et informatique
1er année Master : Intelligence artificielle et ses applications – Année: 2025-2026
Matière : Modélisation et simulation

Série de TD 1

Exercice 01

Soit une chaîne de Markov à 2 états de matrice de transition P telle que $p_{1,2} = 0.25$ et $p_{2,1} = 0.5$.

1. Donnez la matrice de transition, et tracer le graphe de la chaine correspondant
2. Calculer la distribution π_1 sachant que la distribution initiale $\pi_0 = (0, 2, 0.8)$
3. Calculer la probabilité stationnaire $\pi = (p_1 \quad p_2)$.

Exercice 02

Dans une région, s'il pleut un jour alors également le lendemain il pleut avec une probabilité égale à 0.7. De plus, s'il ne pleut pas un certain jour, alors, il pleut le lendemain avec un probabilité égale à 0.2.

1. Modéliser ce problème avec une chaine de Markov à temps discret
2. Donnez la matrice de transition, et tracer le graphe correspondant
3. Si aujourd'hui il pleut, quelle est la probabilité de pleuvoir dans 2 jours, et dans 5 jours ?
4. Peut-on en déduire que la matrice de transition de cette chaine de Markov est une matrice primitive ? Pourquoi?
5. Déterminer la distribution invariante de cette chaine
6. La chaine est-elle irréductible ?
7. La chaîne est-elle périodique ?

Exercice 03

La tendance des prix d'un produit peut être **haussière**, **baissière**, ou **stable**. L'analyse des données historiques des prix a montré les observations suivantes :

- Si le prix est haussier une semaine, la semaine suivante il devient baissier dans 7,5% des cas et stable dans 2,5% des cas.
- Si le prix est baissier une semaine, la semaine suivante il devient haussier dans 15% des cas et stable dans 5% des cas.
- Si le prix est stable une semaine, la semaine suivante il devient haussier dans 25% des cas et baissier dans 25% des cas.

1. Donnez la matrice de transition $\boldsymbol{P}$ de cette chaine de Markov, et tracer le graphe correspondant.
2. Si le marché est haussier aujourd'hui, qu'elle est la probabilité qu'il soit stable dans deux semaines.
3. Montrer que cette chaine est stationnaire (possède une distribution stationnaire unique).
4. Sachant que : $\boldsymbol{P}^{40} = \begin{pmatrix} 0.63 & 0.31 & 0.06 \\ 0.63 & 0.31 & 0.06 \\ 0.63 & 0.31 & 0.06 \end{pmatrix}$.

Exercice 04

Considérons une population où les individus susceptibles d'attraper une maladie. Un individu de la population peut être dans l'un des trois états suivants : **Susceptible (S)** (Sain mais non immunisé), **Malade (M)**, et **Immunisé (I)** (sain et immunisé contre la maladie). L'état d'un individu peut changer d'un jour à l'autre selon les règles suivantes :

- Un individu susceptible **(S)** a une probabilité de 0,95 de le rester et de 0,05 de devenir malade **(M)**,
- Un individu malade **(M)**, a une probabilité de 0,9 de le rester et de 0,1 de devenir immunisé **(I)**,
- Un individu immunisé **(I)** reste à cet état à une probabilité de 0.98, et passe à l'état susceptible **(S)** à une probabilité égale à 0.02

1. Donner la matrice de transition P de la chaîne de Markov qui modélise l'état d'un individu par rapport à cette maladie, avec comme espace d'états $E\{S, M, I\}$.Tracer le graphe orienté correspondant.
2. Sachant qu'au départ la proportion des individus malades dans la population est de 4% des individus et les autres étaient susceptibles (sains mais non immunisés). Calculer la proportion des individus de la population de chaque état après 30 jours. Pour faciliter les calculs :

$$P^{15} = \begin{pmatrix} 0{,}487 & 0{,}261 & 0{,}253 \\ 0{,}101 & 0{,}226 & 0{,}673 \\ 0{,}185 & 0{,}051 & 0{,}764 \end{pmatrix}$$

3. Cette chaine de Markov est-elle apériodique ? irréductible ? récurrente ? Justifier vos réponses.
4. Existe-t-il une loi de probabilité stationnaire unique pour cette chaine ? Justifier votre réponse.
5. Le calcul par ordinateur de la puissance P^{100} de la matrice de transition a donné le résultat suivant (arrondi à 3 décimales) :

$$P^{100} = \begin{pmatrix} 0{,}250 & 0{,}125 & 0{,}625 \\ 0{,}250 & 0{,}125 & 0{,}625 \\ 0{,}250 & 0{,}125 & 0{,}625 \end{pmatrix}$$

Quelle sera la distribution des individus de cette population à long terme ?