الحل النموذجي للتمرين المستمر رقم 01 :

حل التمرين رقم 01 :

1) إيجاد كثير حدود لاغرانج من الدرجة 03 :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)}$$

$$\boxed{L_0(x) = -\frac{1}{30}(x-2)(x-3)(x-5)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)}$$

$$\boxed{L_1(x) = \frac{1}{6}x(x-3)(x-5)}$$

$$L_2(x) = \frac{x(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)}$$

$$\boxed{L_2(x) = -\frac{1}{6}x(x-2)(x-5)}$$

$$L_3(x) = \frac{x(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)}$$

$$\boxed{L_3(x) = \frac{1}{30}x(x-2)(x-3)}$$

إذن كثير حدود لاغرانج يكتب كما يلي :

$$P_3(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3)$$

$$= \frac{1}{30}(x-2)(x-3)(x-5) + \frac{1}{3}x(x-3)(x-5) - \frac{3}{2}x(x-2)(x-5) + \frac{87}{30}x(x-2)(x-3)$$

$$= \frac{1}{30}(x-2)(x^2-8x+15) + \frac{1}{3}(x)(x^2-8x+15) - \frac{3}{2}x(x^2-7x+10) + \frac{87}{30}x(x^2-5x+6)$$

$$= \frac{1}{30}\left[x^3-8x^2+15x-2x^2+16x-30\right] + \frac{1}{3}\left[x^3-8x^2+15x\right] - \frac{3}{2}\left[x^3-7x^2+10x\right] + \frac{87}{30}\left[x^3-5x^2+6x\right]$$

$$\boxed{P_3(x) = \frac{53}{30}x^3 - 7x^2 + \frac{253}{30}x - 1}$$

2) حساب $f(1.5)$

$$f(1.5) \simeq P_3(1.5) = \frac{149}{80} = 1,8625$$

حل التمرين رقم 02 :

1) الدالة $f(x) = x + \ln(x)$ هي دالة معرفة و مستمرة و مشتقة تماما في المجال $]0,+\infty[$ ، وبما أن $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

فإنه حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد $c \in \mathbb{R}_+^*$ بحيث $f(c) = 0$

- بتطبيق طريقة Newton-Raphson على المجال $I=[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ نجد:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n + \ln(x_n)}{1 + \frac{1}{x_n}} = x_n - \frac{x_n(x_n + \ln(x_n))}{1 + x_n}$$

$x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 \simeq 0,5643824 \Rightarrow x_2 = 0,5671390 \Rightarrow x_3 = 0,5671433 \Rightarrow x_4 = 0,5671433 \Rightarrow x_5 = 0,5671433$

حل التمرين رقم 03:

تبيان حدود الاستقاء N الذي $f(x) = \sin \pi x$ من الشكل:

$$P_2(x) = c_0 + c_1(x-0) + c_2(x-0)(x-\frac{1}{6})$$

x_n	$f(x_n)$	D_1	D_2
0	0	$\frac{1/2-0}{1/6-0} = 3$	$\frac{3/2-3}{1/2-0} = -3$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1-1/2}{1/2-1/6} = \frac{3}{2}$	
$\frac{1}{2}$	1		

$c_0 = 0$
$c_1 = 3$
$c_2 = -3$

$$P_2(x) = 0 + 3(x-0) - 3(x-0)(x-\frac{1}{6}) = 3x - 3x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$\boxed{P_2(x) = -3x^2 + \frac{7}{2}x}$$