

Série no 3 : Introduction à la Combinatoire

Exercice 1. (Fonctions Génératrices Ordinaires)

Soit la suite (a_n) définie par $a_n = 3^n + 2$ pour $n \geq 0$.

1. Écrire la fonction génératrice ordinaire $G(x)$ associée à cette suite.
2. Simplifier $G(x)$ sous forme fermée.
3. En déduire le coefficient a_5 en développant $G(x)$.

Exercice 2. (Fonctions Génératrices Exponentielles)

Soit b_n le nombre de permutations de $\{1, \dots, n\}$ avec exactement une descente.

1. Montrer que $d_n = 2^n - n - 1$ est le nombre de toutes les permutations avec une seule descente.
2. Montrer que la fonction génératrice exponentielle est $E(x) = e^x(e^x - 1 - x)$.
3. Calculer b_4 en développant $E(x)$ jusqu'à l'ordre 4.

Exercice 3. (Fonction génératrice et récurrence linéaire)

Soit la suite (a_n) définie par la relation de récurrence :

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 3, \quad a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}, \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

1. Définir la fonction génératrice associée à la suite :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

2. Montrer que $A(x)$ vérifie une équation fonctionnelle linéaire.
3. Résoudre cette équation pour obtenir une expression fermée de $A(x)$.

Exercice 4. (Fonctions Symétriques)

A) Soit $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ un ensemble de variables.

1. Exprimer les fonctions symétriques élémentaires e_0, e_1, e_2, e_3 pour X .
2. Vérifier que :

$$e_2^2 = e_1 e_3 + p_2, \quad p_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

3. Montrer que pour tout $k \geq 1$, on a :

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i e_i p_{k-i} + (-1)^k k e_k = 0.$$

B) Soit la partition $\lambda = (2, 1)$.

- Lister tous les tableaux semi-standards (TSS) de forme $n = 2$ variables.
- Expliciter la fonction de Schur $s_\lambda(x_1, x_2)$.

Solutions

Solution Exercice 1

1. $G(x) = \sum_{n \geq 0} (3^n + 2)x^n = \sum_{n \geq 0} 3^n x^n + 2 \sum_{n \geq 0} x^n$
2. $G(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{2}{1-x} = \frac{3-7x}{(1-3x)(1-x)}$
3. $a_5 = 3^5 + 2 = 243 + 2 = 245$

Solution Exercice 2

1. La fonction génératrice exponentielle compte les permutations avec exactement une descente. Après calculs combinatoires, on obtient : On considère l'ensemble des permutations de n éléments avec exactement une *descente*, c'est-à-dire une position i telle que $\sigma(i) > \sigma(i+1)$. Notons d_n le nombre de telles permutations de n éléments.

Étape 1 : Interprétation combinatoire

Une permutation de n éléments avec exactement une descente est obtenue en choisissant une position $i \in \{1, \dots, n-1\}$ où la descente aura lieu. On peut démontrer que :

$$d_n = 2^n - n - 1.$$

Explication combinatoire (esquisse) : - Le nombre total de permutations de n éléments est $n!$. - Le nombre de permutations sans aucune descente est 1 (la permutation strictement croissante). - Le nombre de permutations avec exactement une descente est relié à la décomposition en deux parties croissantes de longueurs i et $n-i$, donc combinatoirement lié aux sous-ensembles non triviaux.

Mais ici, on part directement de la fonction génératrice.

Étape 2 : Construction de la fonction génératrice exponentielle

La fonction génératrice exponentielle associée à la suite (d_n) est définie par :

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} x^n.$$

On connaît la fonction génératrice exponentielle de la suite 2^n :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n = e^{2x},$$

et celles des suites constantes et de n :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n = x e^x.$$

On suppose que :

$$d_n = 2^n - n - 1 \quad \Rightarrow \quad E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - n - 1}{n!} x^n.$$

Séparons les termes :

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n.$$

On reconnaît :

$$E(x) = e^{2x} - e^x - xe^x.$$

2. Développement à l'ordre 4 :

$$E(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{11x^4}{24} + \dots$$

$$\text{Donc } b_4 = 4! \times \frac{11}{24} = 11$$

Solution Exercice 3

Soit la suite définie par :

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 3, \quad a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}, \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

Définissons la fonction génératrice :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

1. Équation fonctionnelle

On utilise la récurrence pour transformer la série.

Écrivons :

$$A(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n.$$

Mais d'après la relation de récurrence :

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} (4a_{n-1} - 3a_{n-2}) x^n = 4 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n - 3 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n.$$

En indexant correctement :

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = x(A(x) - a_0),$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^2 A(x).$$

Ainsi :

$$A(x) = a_0 + a_1 x + 4x(A(x) - a_0) - 3x^2 A(x).$$

Remplaçons :

$$A(x) = 2 + 3x + 4x(A(x) - 2) - 3x^2 A(x).$$

Développons :

$$A(x) = 2 + 3x + 4xA(x) - 8x - 3x^2 A(x).$$

Regroupons les termes :

$$A(x) - 4xA(x) + 3x^2 A(x) = 2 + 3x - 8x,$$

$$A(x)(1 - 4x + 3x^2) = 2 - 5x.$$

2. Forme fermée

$$A(x) = \frac{2 - 5x}{1 - 4x + 3x^2}.$$

On peut factoriser le dénominateur :

$$1 - 4x + 3x^2 = (1 - x)(1 - 3x).$$

Donc la fonction génératrice est :

$$A(x) = \frac{2 - 5x}{(1 - x)(1 - 3x)}.$$

Solution Exercice 4

Soit $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ un ensemble de variables.

0.0.0.0.1 1. Calcul explicite :

— Fonctions symétriques élémentaires :

$$e_0 = 1$$

$$e_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$e_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

$$e_3 = x_1x_2x_3$$

— Vérification de l'identité :

$$e_2^2 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 = e_1e_3 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = e_1e_3 + p_2$$

où $p_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ est la fonction somme de puissances.

0.0.0.0.2 2. Relation de Newton : Pour tout $k \geq 1$:

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i e_i p_{k-i} + (-1)^k k e_k = 0$$

Cas particulier $k = 2$:

$$p_2 - e_1 p_1 + 2e_2 = 0 \quad (\text{car } p_1 = e_1)$$

Partie 2 : Fonctions de Schur

Soit la partition $\lambda = (2, 1)$.

0.0.0.0.3 1. Tableaux semi-standards : Pour $n = 2$ variables :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

Fonction de Schur :

$$s_{\lambda}(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$$