

CORRIGÉ TYPE D'EXAMEN DE TD (2025)Exercice 1 :

1. Puisque $\dim(\mathbb{R}_2[X])^* = \text{Card}\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} = 3$, il suffit donc de montrer que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est libre. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3 = 0 \\ \Leftrightarrow & (\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3)(P) = 0, \forall P \in \mathbb{R}_2[X], \\ \Leftrightarrow & \alpha_1P(0) + \alpha_2 \int_0^1 P(t)dt + \alpha_3 \int_0^1 tP(t)dt = 0, \forall P \in \mathbb{R}_2[X]. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{cases} \text{Pour } P(X) = 1 \\ \text{Pour } P(X) = X \\ \text{Pour } P(X) = X^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \\ \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3 = 0 \\ \frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Donc $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est libre, alors forme une base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$.

2. Soit $\mathcal{B} = \{P_1, P_2, P_3\}$ la base antéduale de $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, avec

$$P_1(X) = a_1X^2 + b_1X + c_1, P_2(X) = a_2X^2 + b_2X + c_2, P_3(X) = a_3X^3 + b_3X + c_3.$$

On a

$$\varphi_i(P_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

pour $i, j = 1, 2, 3$. Donc

$$\begin{cases} \varphi_1(P_1) = 1 \\ \varphi_2(P_1) = 0 \\ \varphi_3(P_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}b_1 + c_1 = 0 \\ \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{2}c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 6, b_1 = -6 \text{ et } c_1 = 1.$$

$$\begin{cases} \varphi_1(P_2) = 0 \\ \varphi_2(P_2) = 1 \\ \varphi_3(P_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{2}b_2 + c_2 = 1 \\ \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{3}b_2 + \frac{1}{2}c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_2 = -24, b_2 = 18 \text{ et } c_2 = 0.$$

$$\begin{cases} \varphi_1(P_3) = 0 \\ \varphi_2(P_3) = 0 \\ \varphi_3(P_3) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = 0 \\ \frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{2}b_3 + c_3 = 0 \\ \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{3}b_3 + \frac{1}{2}c_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow a_3 = 36, b_3 = -24 \text{ et } c_3 = 0.$$

Alors $\mathcal{B} = \{6X^2 - 6X + 1, -24X^2 + 18X, 36X^2 - 24X\}$.

Exercice 2 :

1. Montrons que f est une forme bilinéaire symétrique

Soient $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f((y_1, y_2), (x_1, x_2)) &= 3y_1x_2 + 3y_2x_1 - 7y_2x_2 \\ &= 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - 7x_2y_2 \\ &= f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \end{aligned}$$

Donc f est symétrique.

Soient $(x_1, x_2), (x'_1, x'_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2) + \alpha(x'_1, x'_2), (y_1, y_2)) &= 3(x_1 + \alpha x'_1)y_2 + 3(x_2 + \alpha x'_2)y_1 - 7(x_2 + \alpha x'_2)y_2 \\ &= 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - 7x_2y_2 + \alpha(3x'_1y_2 + 3x'_2y_1 - 7x'_2y_2) \\ &= f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + \alpha f((x'_1, x'_2), (y_1, y_2)) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire par rapport à la première variable, et comme f est symétrique, f est bilinéaire.

2. Déterminons $\text{Ann}(f)$, le noyau de f

On a :

$$\text{Ann}(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0, \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

Calculons :

- Pour $(y_1, y_2) = (1, 0)$, on obtient $x_2 = 0$.
- Pour $(y_1, y_2) = (0, 1)$, on obtient $x_1 = 0$.

Donc :

$$\text{Ann}(f) = \{(0, 0)\}$$

Par conséquent, f est non dégénérée.

3. Déterminons la matrice de f dans la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$

La matrice associée à f par rapport à $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1, \varepsilon_1) & f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_2, \varepsilon_1) & f(\varepsilon_2, \varepsilon_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 75 \\ 75 & -90 \end{pmatrix}$$

4. Déterminons $F^\perp$, l'orthogonal de F

On a :

$$F^\perp = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0, \forall (y_1, y_2) \in F\}$$

Calculons :

- Pour $(y_1, y_2) = (-3, 1)$, on obtient $x_1 = \frac{16}{3}x_2$.
- Pour $(y_1, y_2) = (-6, 2)$, on obtient aussi $x_1 = \frac{16}{3}x_2$.

Ainsi :

$$F^\perp = \left\{ \left(\frac{16}{3}x_2, x_2 \right) : x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \langle \left(\frac{16}{3}, 1 \right) \rangle = \langle (16, 3) \rangle.$$