
Introduction à la Combinatoire

A. Bazeniar

**Enseignant chercheur
Centre universitaire Abdelhafid Boussof
Mila, Algérie**

Se reporter à des manuels de base et à certaines livres de spécialités

Janvier 2025

Chapitre 3

Fonctions génératrices et symétries

3.1 Introduction

3.2 Fonctions génératrices

Définition 3.2.1. On appelle *série formelle* toute suite $(\mathcal{A}_n)_{n \geq 0}$ d'éléments a_n de $\mathcal{A}$ écrite sous la notation,

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n. \quad (3.1)$$

Par exemple, écrivant quelques séries connues qui ont des coefficients en forme explicite,

$$(1, 2/6, 16/120, \dots, T_n/(2n+1)!, \dots) \iff \sum_{n=0}^{\infty} T_n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} = \tan x,$$

$$(1, 1, 1/2, \dots, 1/n!, \dots) \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

$$\left(\binom{0}{n}, \binom{1}{n}, \dots, \binom{n}{n} \right) \iff \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} x^k,$$

où T_n sont les nombres tangents qui comptent les *permutations alternantes* de $\{1, 2, \dots, 2n+1\}$.

On peut enrichir cette définition par quelques propriétés

1. **L'addition** : L'addition de deux séries s'écrit,

$$\mathcal{A}(x) + \mathcal{H}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 0} b_n x^n = \sum_{n \geq 0} d_n x^n,$$

avec $d_n = a_n + b_n$, $(n \geq 0)$.

2. **La multiplication** : La multiplication de deux séries s'écrit,

$$\mathcal{A}(x) \cdot \mathcal{H}(x) = \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n \right) = \sum_{n \geq 0} d_n x^n,$$

avec $d_n = \sum_{k \geq 0} a_k b_{n-k}$, $(n \geq 0)$.

3. **La puissance** : La puissance d'une série s'écrit,

$$\mathcal{A}^m(x) = \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right)^m = \sum_{\substack{i_1 + i_2 + \dots + i_m = n \\ i_1, \dots, i_m \geq 0}} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m} x^{i_1 + i_2 + \dots + i_m}.$$

Consultez [L03, Chapitre 2] pour des suites bien connues des fonctions génératrices.

Définition 3.2.2 (Laplace et Euler). Soit $a_n = (a_1, \dots, a_n)$ une suite de réels ou de complexes. On appelle fonction génératrice ordinaire et fonction génératrice exponentielle sur l'ensemble des a_n , les deux séries formelles Gen et Exp , données respectivement par,

$$Gen(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n. \quad (3.2)$$

$$Exp(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}. \quad (3.3)$$

Exemple 3.2.1. On cite deux exemples,

1. $\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial,

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k \geq 0} n^k \frac{x^k}{k!} = (1 + x)^n.$$

2. F_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Fibonacci,

$$\sum_{n \geq 0} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Remarque 3.2.1. Il existe une correspondance biunivoque entre une suite et sa fonction génératrice [CS19]. Cela peut être représenté par,

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \iff \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Vous trouverez des fonctions génératrices pour certains nombres dans les sections qui suivent dans ce chapitre.

Remarque 3.2.2. L'algèbre du développement correspondant aux fonctions génératrices ordinaires est connue sous le nom d'algèbre de Cauchy et aux fonctions génératrices exponentielles est appelée calcul symbolique.

3.3 Méthode de construction d'une fonction génératrice

Construire une fonction génératrice consiste à associer à une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ une série formelle qui encode les termes de la suite sous forme de coefficients. Voici les étapes clés pour construire une fonction génératrice adaptée à une suite donnée :

1. **Identifier la suite** : Déterminer la relation de récurrence ou la formule explicite (close) de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$.
2. **Choisir le type de fonction génératrice** :
 - Génératrice ordinaire : Utilisée généralement pour les problèmes de *combinaisons*, *partitions*, ou pour encoder simplement une suite.

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- Génératrice exponentielle : Adaptée aux problèmes impliquant des *permutations*, *arrangements*, ou lorsque les objets sont ordonnés.

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

3. **Dériver ou manipuler la série** : Utiliser les propriétés algébriques des séries formelles :
 - Addition et soustraction de séries.
 - Multiplication de séries (convolution).
 - Dérivation ou intégration formelle.
 - Résolution d'équations fonctionnelles.
4. **Chercher une forme fermée** : Simplifier la série génératrice à une expression rationnelle ou connue (si possible), facilitant l'extraction des coefficients a_n .

3.3.1 Méthode 1 : Par analyse directe de la suite

Il s'agit d'écrire directement la série $\sum a_n x^n$ à partir de l'expression explicite de a_n .

Exemple 3.3.1. Soit $a_n = 2^n$. La fonction génératrice ordinaire est :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}, \quad \text{pour } |x| < \frac{1}{2}.$$

On reconnaît ici une série géométrique de raison $2x$.

3.3.2 Méthode 2 : Par problème combinatoire

Quand la suite (a_n) compte certains objets combinatoires (chemins, partitions, configurations...), on construit la fonction génératrice en associant à chaque choix une contribution en x^n .

Exemple 3.3.2. Soit a_n le nombre de façons de faire la somme n avec des pièces de 1 et 2 unités. On a la récurrence :

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_0 = 1, a_1 = 1.$$

C'est la suite de Fibonacci décalée. Cherchons la fonction génératrice $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

On utilise la méthode algébrique :

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

En multipliant par x :

$$xA(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots,$$

et par x^2 :

$$x^2 A(x) = a_0 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4 + \dots$$

On fait la soustraction :

$$A(x) - xA(x) - x^2 A(x) = a_0 + (a_1 - a_0)x.$$

En utilisant $a_0 = a_1 = 1$:

$$A(x)(1 - x - x^2) = 1.$$

Donc :

$$A(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

3.3.3 Méthode générale (résumé)

Pour construire une fonction génératrice $\sum a_n x^n$, il faut :

1. Identifier la suite (a_n) (explicite ou implicite).
2. Reconnaître ou transformer la suite en forme connue (géométrique, binomiale, Fibonacci...).
3. Traduire les propriétés de la suite (récurrence, relations combinatoires) en équations algébriques.
4. Résoudre l'équation obtenue pour donner une expression fermée (si possible).

Remarque 3.3.1. Si la suite (a_n) provient d'un problème de dénombrement, la fonction génératrice encode souvent l'ensemble des configurations possibles. Elle devient un outil de résolution de problèmes, par exemple via des extractions de coefficients.

3.4 Fonctions symétriques

La théorie des fonctions symétriques a de nombreuses applications en combinatoire énumérative, ainsi qu'à d'autres branches des mathématiques comme la théorie des groupes et la géométrie algébrique [M95].

Soient $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ un ensemble dénombrable et $Z[x_1, x_2, \dots]$ l'anneau des polynômes, à coefficients entiers, en les variables $x_1, x_2, \dots$. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_X$ des permutations de X agit de façon naturelle sur l'anneau $Z[x_1, x_2, \dots]$. Les polynômes invariants par permutation des variables sont dites *symétriques* et $Z[x_1, x_2, \dots]^{\mathfrak{S}_X}$ le sous-anneau des polynômes symétriques.

Définition 3.4.1. Soit $X = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ un ensemble de variables dénombrables. Une fonction symétrique homogène est une série formelle invariante sous toutes les permutations possibles de ses variables $x_1, x_2, x_3, \dots$. On écrit,

$$f(x_{\omega(1)}, x_{\omega(2)}, x_{\omega(3)}, \dots) = f(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n. \quad (3.4)$$

3.4.1 Fonctions symétriques monomiales

Définition 3.4.2. Soit λ une partition de longueur $\leq n$. Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on appelle fonction symétrique monomiale tout polynôme m_λ écrit,

$$m_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\alpha} x^\alpha, \quad (3.5)$$

avec $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ est un monôme de m_λ .

Exemple 3.4.1. Pour $n = 4$, on a

$$\begin{aligned} m_1(4) &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, & m_{1111}(4) &= 0, \\ m_{11}(4) &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4, \\ m_2(4) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \end{aligned}$$

Proposition 3.4.1. Pour tout $k \geq 0$, l'ensemble $\{m_\lambda \mid \lambda \vdash k\}$ des fonctions symétriques monomiales est une base de Z_k . En plus $\dim Z_k = P(k)$, le nombre de partitions de k .

Pour voir la démonstration de cette proposition consulter [E19, chapitre 1].

3.4.2 Fonctions symétriques élémentaires et complètes

Définition 3.4.3. La fonction symétrique élémentaire est la somme de tous les produits de n variables distinctes x_i donnée par la formule,

$$e_k(n) = m_{(1^k)} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \quad (3.6)$$

avec $e_0 = m_{\emptyset} = 1$.

Exemple 3.4.2. Pour $n = 4$, on a

$$\begin{aligned} e_1(4) &= m_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ e_2(4) &= m_{11} = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4, \\ e_3(4) &= m_{111} = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4. \end{aligned}$$

La fonction génératrice des $e_k(n)$ est,

$$\sum_{k=0}^n e_k t^k = \prod_{i=1}^n (1 + x_i t). \quad (3.7)$$

Interprétation : On peut donner une interprétation de $e_3(4)$ par partition et pour $n = 4$ (la première colonne de chaque diagramme de TSS),

3	4	4	4
2	2	3	3
1	1	1	2

Le monôme associé à un tableau est le produit de tous les $x_{i,(i=1,\dots,4)}$. Alors,

$$e_3(4) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4.$$

Remarque 3.4.1. Pour chaque partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, on introduit

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_k}.$$

Par exemple pour $n = 4$, on a : $e_{(1,1)} = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2$.

Remarque 3.4.2. Le sous-anneau $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]^{\mathfrak{S}_X}$ est engendré par les fonctions symétriques élémentaires.

Définition 3.4.4. La fonction symétrique complète est la somme de tous les produits de n variables distinctes x_i donnée par la formule,

$$h_k(n) = \sum_{|\lambda|=k} m_\lambda = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq \dots \leq i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \quad (3.8)$$

avec $h_0 = m_\emptyset = 1$.

La fonction génératrice des $h_k(n)$ est

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k t^k = \prod_{i=1}^n (1 - x_i t)^{-1}. \quad (3.9)$$

Exemple 3.4.3. Pour $n = 3$, on a

$$\begin{aligned} h_1(3) &= m_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ h_2(3) &= m_2 + m_{11} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \\ h_3(3) &= m_3 + m_{21} + m_{111} \\ &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2 + x_1 x_2 x_3. \end{aligned}$$

Interprétation : On peut donner une interprétation de $h_3(2)$ par partition et pour $n = 4$ (la première ligne de chaque diagramme de TSS),

$$\begin{array}{ccc} \boxed{1} \boxed{1} & \boxed{2} \boxed{2} & \boxed{3} \boxed{3} \\ \boxed{1} \boxed{2} & \boxed{2} \boxed{3} & \boxed{2} \boxed{3} \end{array}$$

Le monôme associé à un tableau est le produit de tous les $x_{i,(i=1,2)}$. Alors,

$$h_2(3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3.$$

Remarque 3.4.3. Pour chaque partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, on introduit

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots h_{\lambda_k}.$$

Par exemple pour $n = 3$, on a : $h_{(2,1)}(3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)(x_1 + x_2 + x_3)$.

En regardant les deux fonctions génératrices de e_λ et h_λ , on peut conclure les liens fondamentaux entre les fonctions symétriques élémentaires et complètes données par les relations suivantes,

$$e(t)h(-t) = 1, \quad (3.10)$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k e_k h_{n-k} = 0, \quad n \geq 1. \quad (3.11)$$

3.4.3 Sommes de puissances

Définition 3.4.5. La fonction symétrique somme de puissances est la somme de tous les n variables distinctes x_i donnée par la formule,

$$p_k(n) = \sum_{|\lambda|=k} m_k = \sum_{i=1}^n x_i^k, \quad (3.12)$$

avec $p_0 = m_\emptyset = 1$.

La fonction génératrice des $p_k(n)$ est

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k t^{k-1} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(1 - x_i t)}. \quad (3.13)$$

Exemple 3.4.4. Pour $n = 3$, on a

$$\begin{aligned} p_1(3) &= m_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ p_2(3) &= m_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ p_3(3) &= m_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3. \end{aligned}$$

Remarque 3.4.4. Pour chaque partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, on introduit

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_k}.$$

Par exemple pour $n = 3$, on a : $p_{(2,1)}(3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1 + x_2 + x_3)$.

3.4.4 Fonction Schur

Les fonctions Schur ont été introduites par Schur, et elles interviennent de manière profonde dans les applications des fonctions symétriques.

Définition 3.4.6. (Combinatoire) Pour toute partition λ et tout entier $n \geq 1$. On appelle s_λ la fonction Schur associée à λ notée par,

$$s_\lambda = \sum_{T \in \text{TSS}(\lambda)} x^T, \quad (3.14)$$

où TSS sont tous les tableaux semi-standards définirent en ??.

Exemple 3.4.5. Les tableaux semi-standard de $\lambda = (2, 1)$ pour $n = 2$ sont,

Et la fonction de Schur s'écrit,

$$s_{21} = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1.$$

2	
1	1

2	
1	2

FIGURE 3.1 – Les deux tableaux semi-standards de $\lambda = (2, 1)$ pour $n = 2$.