

Chapitre 1

Introduction à la théorie de contrôle

Chapitre 2

Théorie de contrôle optimal

Chapitre 3

Principe du maximum de Pontriaguine

Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter les aspects théoriques de la théorie du contrôle optimal, qui analyse les propriétés des systèmes dynamiques commandés. D'un point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre appelé contrôle (commande), avec lequel on peut amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en optimisant éventuellement certains critères.

La théorie du contrôle optimal traite des problèmes d'optimisation des systèmes dynamiques. Le problème doit être bien posé avant qu'une solution puisse être recherchée. Cela nécessite une description mathématique claire du système dynamique, des contraintes imposées au système et de la fonction objectif à optimiser.

Le but principal de ce chapitre est d'introduire le principe du maximum pour différentes classes de problèmes de contrôle optimal. Ce principe considère les conditions nécessaires qui doivent être satisfaites par tout contrôle optimal. Ainsi, après avoir donné un bref aperçu historique de la discipline,

nous commençons ce chapitre par une description de la formulation mathématique d'un problème déterministe de contrôle optimal continu standard, qui est considéré comme un problème d'optimisation sur un espace de fonctions admissibles et qui peut servir comme une base pour d'autres extensions. Par la suite, nous fournissons un ensemble de conditions (nécessaires et suffisantes) d'optimalité d'un problème de contrôle optimal sans et avec contraintes classiques. Puis, ces conditions sont étendues au cas de contraintes intermédiaires, ainsi qu'au cas de contrôle optimal avec retard.

Les économistes analysent fréquemment les problèmes de contrôle optimal impliquant un taux d'actualisation. En combinant le facteur d'actualisation avec les variables adjointes et les multiplicateurs de Lagrange et en apportant des changements appropriés dans les définitions des fonctions Hamiltonien et Lagrangien, il est possible de dériver le principe du maximum pour ce genre de problème, ainsi décrit dans la dernière section.

3.1 Historique

Les mathématiques de la théorie du contrôle optimal ont leurs racines dans le calcul des variations. Nous évoquons, tout d'abord, l'histoire de ce dernier. Cette discipline importante de l'analyse mathématique a été créée dans la seconde moitié du XVII^e siècle. En 1662, Fermat a présenté la loi de la réfraction de la lumière comme solution d'un problème à temps minimum. Plus tard, en 1686, Newton a proposé et résolu le problème qui consiste à déterminer, en dimension trois, la forme optimale de la proue d'un navire, qui offre une résistance minimale lorsqu'il se déplace dans un milieu résistant. Le problème a une histoire très riche et il est bien documenté dans la littérature. Le problème et sa solution ont été donnés en 1687 dans son ouvrage "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" (Mathematical Principles of Natural Philosophy).

Habituellement, le célèbre problème de la brachistochrone de Johann Bernoulli (1696) est considéré comme un point de départ du calcul des variations. Bernoulli a proposé ce problème comme un problème de défi mathématique,

dont il a demandé aux mathématiciens les plus ingénieux de trouver le chemin en temps minimal d'un point de masse entre deux points du champ gravitationnel de la Terre. En 1697, son frère Jacob (James) Bernoulli publia sa solution et proposa un problème plus général. Outre les frères Bernoulli, Newton, Leibniz et l'Hôpital ont également apporté des solutions correctes au problème de la brachistochrone.

Entre 1696 et 1900, un grand nombre de savants ont travaillé dans ce domaine et le livre de H. H. Goldstine [1] fournit un traitement détaillé de cet ensemble de travaux. En particulier, les principales contributions importantes au cours de cette période ont été faites par John et James Bernoulli, Leonhard Euler, Isaac Newton, Joseph-Louis Lagrange, Gottfried Wilhelm Leibniz, Adrien Marie Legendre, Carl Jacobi, William Rowan Hamilton, Lejeune Dirichlet, et Karl Theodor Weierstrass.

Cependant, Euler et Lagrange ont largement contribué au développement du domaine et ils sont considérés comme les pères fondateurs du calcul des variations. Au XIX^e siècle, Hamilton, Weierstrass et Jacobi ont approfondi la théorie. Les méthodes qui en résultent ont été (et sont toujours) d'une grande valeur en mécanique analytique (c'est pourquoi nous parlons de "systèmes hamiltoniens"). L'essor du calcul des variations était étroitement lié aux problèmes de la physique. Il a fallu environ deux siècles et demi pour que les premières applications économiques soient faites. Evans (1924) [?] a étudié le problème de la tarification dynamique pour un monopoleur, tandis que Ramsey (1928) [19] a analysé l'accumulation du capital néoclassique en utilisant l'équation d'Euler. Quelques dizaines d'années plus tard, des idées apparentées ont joué un rôle dans l'économie financière.

À la fin du 19^{ème} siècle et dans la première moitié du 20^{ème} siècle et suite aux travaux de David Hilbert (Allemagne), Oskar Bolza (Allemagne et USA), le problème fondamental de la minimisation d'une intégrale soumise à des contraintes d'équations différentielles est devenu un problème d'intérêt majeur en raison de diverses applications militaires aux États-Unis et en URSS. Ces problèmes ont nécessité le traitement de contraintes particulières

qui étaient fondamentalement ignorées dans le calcul des variations et ont conduit à la théorie du contrôle optimal.

L'histoire du développement du contrôle optimal est moins précise et fait l'objet de divergences d'opinions. L'article "300 ans de contrôle optimal : de la brachistochrone au principe du maximum" de Sussmann et Willems [2] indique clairement que le contrôle optimal est né en 1697. Bien que tout le monde s'accorde à dire que le contrôle optimal est une extension du calcul classique des variations, d'autres spécialistes [3, 4] suggèrent que la théorie du contrôle optimal a commencé en 1956 avec la découverte du Principe du Maximum de Pontriaguine.

Cependant, d'après J. A. Burns [5], pour passer des approches variationnelles classiques à la théorie moderne du contrôle, deux étapes importantes se sont produites dans deux travaux déterminants réalisés en 1924 et 1933. En effet, dans la thèse de L. M. Graves en 1924 [6], ce dernier a traité la dérivée comme une fonction indépendante et a donc distingué les variables d'état et celle du contrôle. En 1926, C. Caratheodory a donné la première formulation de la condition nécessaire classique de Weierstrass en termes de Hamiltonien [7]. Ce travail est considéré par J. A. Burns [5] comme la première bifurcation vers la théorie moderne du contrôle. Enfin, L. M. Graves en 1933 [9] a donné une formulation témoin de la condition de Weierstrass classique pour un problème de type Bolza. Ses idées sont essentielles pour comprendre la puissance des méthodes du contrôle optimal moderne.

La date la plus importante de l'histoire de la théorie de contrôle optimal est l'année 1958, avec le livre "*The Mathematical Theory of Optimal Processes*", écrit par les mathématiciens soviétiques Pontriaguine, Boltyanskii, Gamkrelidze, et Mischenko. L'importance de ce livre ne réside pas seulement dans l'étude rigoureuse des problèmes de contrôle optimal et du calcul des variations, mais également dans la formulation et la preuve du principe du maximum pour les problèmes du contrôle optimal, qui révolutionnent la théorie moderne de contrôle optimal et ouvrent un vaste portail de recherche

dans cette discipline. Dans ce livre, Pontryaguine a démontré le principe du maximum pour les problèmes de contrôle avec la forme de Lagrange.

Le principe du maximum du Pontryaguine a également ses racines dans les problèmes de l'ingénierie. Dans les années 1950, les ingénieurs de l'Union Soviétique étaient entrain de résoudre les problèmes de pilotage des avions. Ils ont discuté ces problèmes avec des mathématiciens de l'institut de mathématiques "Steklov" de Moscou. Pontryaguine et son groupe se sont intéressés à ce domaine et leurs recherches ont abouti au fameux Principe du Maximum. Ainsi, l'école russe a des contributions essentielles dans la théorie du contrôle, où à titre d'exemple, la variable de contrôle est souvent désignée par la lettre "u", tirée du mot russe "upravlenije" signifiant contrôle.

L'approche de Bellman, connue sous le nom de programmation dynamique, est une autre approche importante qui a contribué au développement de l'optimisation dynamique. Notons que cette approche a été introduite au début des années 1950 par Richard Bellman. Néanmoins, en 1994, Pesch et Bulirsch [16] ont découvert que les idées à la fois du principe maximum et de l'équation de Bellman, se trouvent déjà dans les travaux de Carathéodory (1926, 1935) [7, 8], et il s'est avéré que les conditions d'optimalité du problème du contrôle optimal sont des conséquences de ses résultats.

Les articles [3, 2] fournissent un joli résumé historique de ces résultats et de leur impact sur le contrôle optimal moderne. De toute évidence, tout le monde convient à un certain niveau que le calcul des variations est un point de départ pour la théorie moderne du contrôle optimal.

L'histoire du développement de la théorie du contrôle optimal est très intéressante. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer aux travaux [?, ?, ?, 1, ?, 3, 2].

3.2 Formulation mathématique d'un problème de contrôle optimal

La partie la plus importante dans la résolution de tout problème pratique est le processus de modélisation, qui exige une description mathématique suffisamment réaliste, simple et la plus fidèle possible à la situation réelle, qu'elle soit physique, économique ou autre.

La formulation d'un problème de contrôle optimal exige une description mathématique du processus à contrôler, avec des contraintes physiques à imposer au système et la détermination du critère de performance à optimiser (objectif du contrôle).

La théorie du contrôle s'intéresse à prédire la réponse du système à une entrée donnée et à expliquer l'influence du contrôle sur la dynamique du système.

3.2.1 Système de contrôle

Considérons un système différentiel explicite de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), t) , \\ x(0) = x^0, \end{cases} \quad (3.1)$$

dont l'état est décrit par un vecteur $x(.) \in \mathbb{R}^n$ dit variable d'état, x^0 étant l'état initial. Cette variable d'état dépend de la variable réelle $t \in [0, t^*]$ et vérifie des relations (souvent différentielles) appelées équations d'états, f étant une fonction vectorielle de n composantes $f_i, i = \overline{1, n}$, pouvant être linéaire ou non linéaire.

Généralement, on souhaite agir sur le système (3.1) de façon à atteindre une cible ou un objectif donné. C'est pour cela que nous modifions le système (3.1) en introduisant une fonction (paramètre) $u(.) \in \mathbb{R}^r$ qu'on appelle contrôle (commande), qui est une fonction localement intégrable, définie sur

$[0, t^*]$. Ainsi, nous obtenons le système de contrôle explicite qui peut être caractérisé par un ensemble d'équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r. \quad (3.2)$$

Nous supposons que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie les conditions du théorème de Cauchy de sorte qu'on puisse assurer l'existence et l'unicité de la solution $x(x^0, u, t)$.

Stratégies de contrôle d'un système dynamique

Pour contrôler un système dynamique, on distingue deux types de stratégies :

- **Stratégie en boucle ouverte**

La stratégie en boucle ouverte consiste à chercher un contrôle admissible et qui ne dépend pas de l'état de système. Cette stratégie est schématisée par la figure suivante :

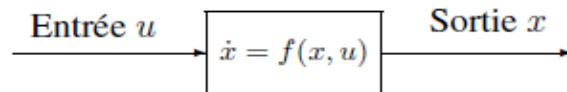


FIGURE 3.1: Commande en boucle ouverte

- **La stratégie en boucle fermée**

Considérons un système donné par son équation d'état et un ensemble de contrôles. Dans la stratégie en boucle fermée, la loi du contrôle u est déterminée en fonction du temps mais aussi de l'état x . Autrement dit, l'état du système est pris en compte à chaque instant afin de déterminer “en temps réel” le contrôle. Le contrôle est alors appelé feedback.

Cette stratégie peut se résumer par le schéma suivant :

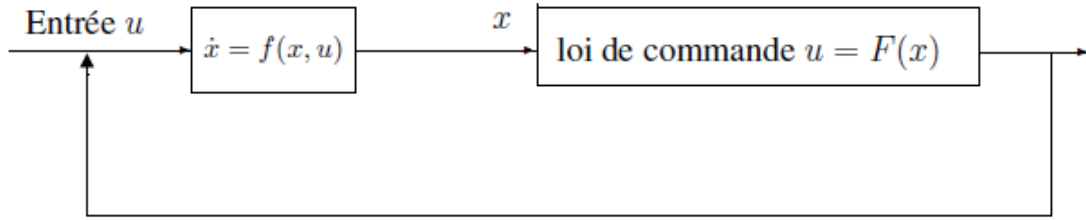


FIGURE 3.2: Commande en boucle fermée

Classes des contrôles admissibles

Généralement, les commandes admissibles peuvent être non bornées, bornées ou de type bang-bang.

- **Commande bornée**

Dans beaucoup de problèmes de contrôle, on peut minorer et majorer les paramètres $u_j(t)$, $1 \leq j \leq r$ par des constantes. Considérons pour ce type de problème la contrainte $a_j \leq u_j \leq b_j$. Lorsque u est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre -1 et 1 . Notons que l'on peut remplacer u_j par v_j en posant $u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j$ et ainsi v_j est aussi intégrable et l'on a $-1 \leq v_j \leq 1$, $j = \overline{1, r}$.

- **Commande bang-bang** Dans la théorie du contrôle, un contrôle bang-bang est un feedback qui bascule brusquement entre deux valeurs, il est souvent utilisé pour contrôler un système qui accepte une entrée binaire. En d'autres termes, un contrôle $u \in U$ est appelé contrôle Bang-Bang si pour chaque instant t et chaque indice $j = \overline{1, r}$, on a $|u_j(t)| = 1$. Une commande bang-bang est une commande qui possède au moins un instant de commutation.

3.3 Problème de contrôle optimal

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t), t), & x(0) = x^0, t \in [0, t^*], & \text{(équation d'état),} \\ u \in U, & & \text{(contraintes sur le contrôle).} \end{cases}$$

où U est un compact de $\mathbb{R}^r$.

Lors de la formulation d'un problème de contrôle, l'objectif est de fournir une motivation physique pour la sélection d'une mesure de qualité pour le système. Le problème revient à définir une expression mathématique qui, lorsqu'elle est optimisée, indique que le système a atteint un état désirable. Donc, choisir une mesure de qualité est une traduction en termes mathématiques des exigences physiques du système au fil du temps.

En d'autres termes, le problème de contrôle a pour but d'amener le système d'un état initial $x(0) = x^0$ donné à un certain état final $x(t^*) = x^*$, tout en minimisant un certain critère tel que la fonctionnelle suivante :

$$\min_{t^*, u \in U} J(u) = S(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt, \quad (3.3)$$

où $F : \mathbb{R}^n \times U \times [0, t^*] \rightarrow \mathbb{R}$, $x(t^*)$ et t^* peuvent être libres ou fixés. On peut classer les fonctions objectifs en deux critères physiques de performance :

Temps optimal

On parle d'un problème en temps minimal lorsque $F(x(t), u(t), t) = 1$, $S(x(t^*), t^*) = 0$ et le temps final t^* est libre dans l'expression $\min \int_0^{t^*} 1 dt$.

Coût optimal

On parle d'un problème en coût minimal lorsque le temps final t^* est fixé dans l'expression :

$$\min_{u \in U} J(u) = S(x(t^*)) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt. \quad (3.4)$$

Il existe, évidemment, des problèmes qui combinent les deux critères physiques de qualité, et on parlera dans ce cas d'un problème de contrôle en temps et en coût minimal.

3.3.1 Les classes de problèmes de contrôle optimal

Selon la forme du critère de qualité, on distingue généralement trois types de problèmes de contrôle optimal :

a) Problème de Lagrange

Un problème de contrôle optimal est dit de Lagrange si le système dynamique est :

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0, \quad (3.5)$$

où les contrôles $u(\cdot)$ sont des fonctions définies de $[0, t^*]$ dans $U \subset \mathbb{R}^r$, et la fonction coût est comme suit :

$$\min_{t^*, u \in U} J(u) = \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt, \quad (3.6)$$

où $F : \mathbb{R}^n \times U \times [0, t^*] \rightarrow \mathbb{R}$, et $x(0) = x^0$ est un état initial donné.

b) Problème de Mayer

Dans ce cas, le critère à optimiser dépend uniquement de la valeur terminale de l'état. Alors le problème de Mayer peut être défini comme suit :

$$\begin{cases} \min_{t^*, u \in U} J(u) = S(x(t^*), t^*), \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x^0. \end{cases} \quad (3.7)$$

c) Problème de Bolza

L'avantage du problème de Bolza est qu'il regroupe les deux précédentes formulations (Lagrange et Mayer). Le problème de Bolza est

défini par :

$$\begin{cases} \min_{t^*, u \in U} J(u) = S(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x^0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Remarque 3.1. *Les trois formulations sont équivalentes, c'est à dire qu'on peut passer de l'une à l'autre.*

Le problème de Lagrange a été discuté pour la première fois en 1762, Mayer a considéré son problème en 1878, et le problème de Bolza a été formulé en 1913.

3.4 Principe du maximum de Pontriaguine

Dans cette section, nous énonçons sans preuve les conditions nécessaires d'optimalité, pour des problèmes de contrôle optimal sans contrainte sur l'état, puis avec contrainte sur l'état. Pour plus de détails, voir Pontriaguine et al. [20], Grass et al. [10], Sethi et al. [11] et E. Trélat [12].

3.4.1 Principe du maximum de Pontriaguine sans contraintes sur l'état

Considérons le problème de contrôle optimal suivant, avec un temps terminal t^* fixe :

$$\begin{cases} \min J(u) = S(x(t^*)) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt, \\ \dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0, \quad t \in [0, t^*], \\ u \in U. \end{cases} \quad (3.9)$$

où U est un compact de $\mathbb{R}^r$.

La démonstration historique du principe du maximum est basée sur la maxi-

misation du Hamiltonien, défini comme suit pour le problème (3.9) :

$$H(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t) = \psi_0 F(x(t), u(t), t) + \psi'(t) f(x(t), u(t), t), \quad (3.10)$$

où le vecteur $\psi(t) : [0, t^*] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur d'état adjoint ; ψ_0 est appelée variable duale du coût.

Conditions nécessaires d'optimalité

Théorème 3.1. (*Principe du maximum*) [11]

Soient $u^*(t) \in U$ une commande optimale admissible et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale associée à $u^*(t)$. Alors, il existe un réel $\psi_0^* \leq 0$ et un vecteur $\psi^*(t)$ tels que les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t), t), & x(0) = x^0, \\ \dot{\psi}^*(t) = -H_x(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t), t), & \psi^*(t^*) = \psi_0^* S_x(x^*(t^*)), \\ H(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t), t) \geq H(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), v(t), t), & \forall v(t) \in U, t \in [0, t^*], \end{cases} \quad (3.11)$$

avec :

$$H_x(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t), t) = \frac{\partial H(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t)}{\partial x} \Big|_{x(t)=x^*(t), \psi_0=\psi_0^*, \psi(t)=\psi^*(t), u(t)=u^*(t)},$$

$$S_x(x^*(t^*)) = \frac{\partial S(x(t^*))}{\partial x} \Big|_{x(t^*)=x^*(t^*)}.$$

On voit bien que $u^*(t)$ va fournir un maximum global au Hamiltonien $H(x^*(t), \psi^*(t), v(t), t)$ pour $v(t) \in U$. Pour cette raison, les conditions nécessaires (3.11) sont appelées "Principe du maximum" ; ψ_0 est appelée variable duale du coût, généralement on choisit $\psi_0^* = -1$, correspondant au principe du maximum.

Remarque 3.2. On peut travailler avec $\psi_0^* > 0$ ($\psi_0^* = 1$) et la dernière inégalité des relations (3.11) sera inversée. On parle alors du principe du minimum.

Conditions suffisantes d'optimalité

Jusqu'à présent, nous avons énoncé les conditions nécessaires d'optimalité. Dans ce qui suit, nous énonçons sans preuve un théorème qui nous donne une condition suffisante d'optimalité pour un problème de contrôle optimal sans contraintes sur l'état. Ce théorème est important, car les modèles dérivés de nombreux problèmes de la physique et de sciences de gestion satisfont les conditions requises pour que les conditions nécessaires deviennent suffisantes. Définissons, tout d'abord, la fonction H^0 :

$$H^0(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t) = \max_{v(t) \in U} H(x(t), \psi_0, \psi(t), v(t), t). \quad (3.12)$$

Théorème 3.2. [11]

Si $(x^(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t))$ satisfait les conditions nécessaires (3.11) pour tout $t \in [0, t^*]$, et si la fonction $H^0(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t)$ est convexe en x pour tout $t \in [0, t^*]$ et $S(x(t^*))$ est convexe en x , alors $u^*(t)$ est un contrôle optimal du problème (3.9).*

3.4.2 Principe du maximum de Pontriaguine avec contraintes sur l'état

Ici nous imposons au problème précédent des contraintes sur l'état et le contrôle. Pour tout instant $t \in [0, t^*]$, le couple $(x(t), u(t))$ doit satisfaire la contrainte :

$$g(x(t), u(t), t) \leq 0, \quad \forall t \in [0, t^*], \quad (3.13)$$

avec $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times [0, t^*] \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Avant d'aller plus loin, écrivons le problème de contrôle optimal à étudier :

$$\begin{cases} \min J(u) = S(x(t^*)) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt, \\ \dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0, \quad t \in [0, t^*], \\ g(x(t), u(t), t) \leq 0, \quad t \in [0, t^*], \quad u \in U = \mathbb{R}^r. \end{cases} \quad (3.14)$$

Conditions nécessaires d'optimalité

Introduisons le Lagrangien du problème (3.14) :

$$L(x(t), \psi_0, \psi(t), \lambda(t), u(t), t) = H(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t) + \lambda'(t)g(x(t), u(t), t), \quad (3.15)$$

où les composantes λ_i du vecteur λ sont appelées multiplicateurs de Lagrange. Ces multiplicateurs doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$\lambda_i(t) \geq 0, \quad \lambda_i(t)g_i(x(t), u(t), t) = 0, \quad \forall i = \overline{1, m}, \quad \forall t \in [0, t^*]. \quad (3.16)$$

Le vecteur adjoint satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\psi}(t) = -L_x(x(t), \psi_0, \psi(t), \lambda(t), u(t), t), \quad \psi(t^*) = \psi_0 S_x(x(t^*)). \quad (3.17)$$

Théorème 3.3. [11] (*Principe du maximum de Pontriaguine avec contrainte sur l'état*)

Soit $u^*(t) \in \mathbb{R}^r$ un contrôle optimal et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale associée à $u^*(t)$. Alors il existe un réel $\psi_0^* \leq 0$, un vecteur adjoint $\psi^*(t)$ et un vecteur multiplicateur de Lagrange $\lambda^*(t)$ tels que les équations suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t), t), \quad x(0) = x^0, \\ \dot{\psi}^*(t) = -L_x(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), \lambda^*(t), u^*(t), t), \quad \psi^*(t^*) = \psi_0^* S_x(x^*(t^*)), \\ H(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t), t) = \max_{v(t) \in \mathbb{R}^r | g(x^*, v, t) \leq 0} H(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), v(t), t), \quad t \in [0, t^*], \\ \frac{\partial L(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), \lambda^*(t), u(t), t)}{\partial u} \Big|_{u(t)=u^*(t)} = 0, \\ g(x^*(t), u^*(t), t) \leq 0, \quad t \in [0, t^*], \\ \lambda_i^*(t) \geq 0, \quad \lambda_i^*(t)g_i(x^*(t), u^*(t), t) = 0, \quad \forall i = \overline{1, m}, \quad t \in [0, t^*]. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Conditions suffisantes d'optimalité

Le résultat de conditions suffisantes nécessite les concepts de fonctions convexe et quasi-convexe.

Définition 3.1. Soit f une fonction définie sur un ensemble convexe X de $\mathbb{R}^n$. La fonction f est dite convexe, si pour tous les points $x, y \in X$, et pour tout nombre réel $\lambda \in [0, 1]$ l'inégalité suivante est vérifiée :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad (3.19)$$

La fonction f est dite quasi-convexe si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}. \quad (3.20)$$

En outre, on dit que f est strictement convexe si pour tous les points $x, y \in X$, $x \neq y$ et pour tout nombre réel $\lambda \in]0, 1[$, la relation (3.19) est vérifiée avec une inégalité stricte. De plus, on dit que f est concave, quasi-concave ou strictement concave si $(-f)$ est respectivement convexe, quasi-convexe ou strictement convexe.

Nous pouvons maintenant énoncer les conditions suffisantes d'optimalité concernant le problème de contrôle optimal avec contraintes. A cet effet, définissons la fonction suivante :

$$H^0(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t) = \max_{v(t) \in \mathbb{R}^r / g(x, u, t) \leq 0} H(x(t), \psi_0, \psi(t), v(t), t). \quad (3.21)$$

Théorème 3.4.1. Les conditions suffisantes d'optimalité

Soit $(x^*, u^*, \psi_0^*, \psi^*, \lambda^*)$ satisfaisant les conditions nécessaires (3.18).

Si $H^0(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t)$ est convexe en x pour tout $t \in [0, t^*]$, $S(x(t^*))$ est convexe pour toute trajectoire x admissible et la fonction $g(x(t), u(t), t)$ définie par (3.13) est quasi-convexe pour tout couple (x, u) admissible, alors (x^*, u^*) est un couple optimal.

3.5 Contrôle optimal d'un système dynamique avec retard

Les systèmes dynamiques avec retard sont des systèmes dans lesquels on trouve des délais entre l'application d'une entrée (commande) au système et son effet qui en résulte sur celui-ci.

Généralement, pour plusieurs phénomènes nous constatons souvent un retard entre une action et ses conséquences. Pour cela, le contrôle optimal des systèmes dynamiques avec retard joue un rôle important dans la modélisation de plusieurs phénomènes de la physique, de l'astronomie, de la biologie, de l'économie financière et de plusieurs autres domaines.

En 1961, Kharatishvili [17] a généralisé le principe du maximum de Pontriaguine pour un problème du contrôle optimal avec retard, il a été le premier qui a fourni un principe du maximum pour les problèmes avec retard constant sur l'état, il a aussi donné des résultats similaires pour un problème du contrôle avec retard sur le contrôle.

En 1966, Chyung et Lee [21] ont obtenu le principe du maximum pour un problème du contrôle optimal avec retard mixte, à la fois, sur l'état et sur le contrôle.

En 1968, Halanay [18] a développé le principe du maximum pour un problème du contrôle optimal avec plusieurs retards constants sur les variables d'état et sur le contrôle.

Dans cette section, nous présentons un ensemble de conditions nécessaires d'optimalité des systèmes dynamiques avec retard, développé dans [13].

3.5.1 Principe du maximum de Pontriaguine avec retard

Considérons le problème du contrôle optimal avec retard suivant :

$$\min_u J(u) = S(x(t^*)) + \int_0^{t^*} F(x(t), x(t-h), u(t), u(t-s), t) dt \quad (3.22)$$

$$\dot{x} = f(x(t), x(t-h), u(t), u(t-s), t), \quad t \in [0, t^*], \quad (3.23)$$

$$x(t) = x^0(t), \quad t \in [0-h, 0],$$

$$u(t) = u^0(t), \quad t \in [0-s, 0],$$

$$g(x(t), x(t-h), u(t), u(t-s), t) \leq 0, \quad t \in [0, t^*], \quad (3.24)$$

avec $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times [0, t^*] \rightarrow \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^r$.

Posons $(h, s) \neq (0, 0)$ et considérons le Hamiltonien et le Lagrangien de ce problème :

$$\begin{aligned} H(x(t), x(t-h), \psi_0, \psi(t), u(t), u(t-s), t) &= \psi_0 F(x(t), x(t-h), u(t), u(t-s), t) + \\ &\psi'(t) f(x(t), x(t-h), u(t), u(t-s), t), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} L(x(t), x(t-h), \psi_0, \psi(t), \lambda(t), u(t), u(t-s), t) &= H(x(t), x(t-h), \psi_0, \psi(t), u(t), u(t-s), t) + \\ &\lambda'(t) g(x(t), x(t-h), u(t), u(t-s), t), \end{aligned} \quad (3.26)$$

avec ψ dans $\mathbb{R}^n$, λ dans $\mathbb{R}^m$.

Théorème 3.5.1. [13] [*Principe du maximum de Pontriaguine avec retard*]

Soit $u^*(t) \in \mathbb{R}^r$ un contrôle optimal et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale associée à $u^*(t)$. Alors il existe un réel $\psi_0^* \leq 0$, un vecteur adjoint $\psi^*(t)$ et un vecteur multiplicateur de Lagrange $\lambda^*(t)$ tels que les relations suivantes

sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^*(t) = f(x^*(t), x^*(t-h), u^*(t), u^*(t-s), t), t \in [0, t^*], \\ \dot{\psi}^*(t) = -\frac{\partial L^*}{\partial x}(t) - \chi_{[0, t^*-h]}(t) \frac{\partial L^*}{\partial x(t-h)}(t+h), \\ \frac{\partial L^*}{\partial u(t)}(t) + \chi_{[0, t^*-s]}(t) \frac{\partial L^*}{\partial u(t-s)}(t+s) = 0, \\ \psi(t^*) = \psi_0 S_x(x^*(t^*)), \\ u^*(t) \in \arg \max_{\{v \in \mathbb{R}^r / g(x^*, v, t) \leq 0\}} \{H(x^*(t), x^*(t-h), \psi_0^*, \psi^*(t), v(t), v(t-s), t)\}, \\ \lambda_i^*(t) \geq 0, \quad \lambda_i^*(t) g_i(x^*(t), x^*(t-h), u^*(t), u^*(t-s), t) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \end{array} \right. \quad (3.27)$$

où la fonction caractéristique $\chi_{[0, t^*-h]}(t)$ vaut :

$$\chi_{[0, t^*-h]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [0, t^* - h], \\ 0, & \text{si non.} \end{cases} \quad (3.28)$$

3.6 Contrôle optimal d'un système dynamique avec contraintes intermédiaires

Dans cette section, nous énonçons le principe du maximum de Pontriaguine pour un problème de contrôle optimal avec des contraintes aux instants intermédiaires. Pour plus de détails, voir [14].

Soient $k+1$ nombres réels tels que $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k = t^*$, et définissons le vecteur :

$$p = ((x(t_0), t_0), (x(t_1), t_1), \dots, (x(t^*), t^*)).$$

Considérons maintenant sur l'intervalle $[t_0, t^*]$ le problème du contrôle optimal avec contraintes aux points intermédiaires, de la forme :

$$\begin{cases} \min J = \varphi_0(p), \\ \dot{x} = f(x, u, t), \quad u \in U, \\ \varphi_i(p) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ \eta_j(p) = 0, \quad j = \overline{1, q}, \end{cases} \quad (3.29)$$

où chaque nombre $t_0, t_1, \dots, t_k$ peut ne pas être fixé, $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r$, la fonction $x(\cdot)$ est absolument continue et $u(\cdot)$ est une fonction bornée mesurable, avec $u(t) \in U$.

On suppose que la fonction f est définie et continue sur l'ensemble ouvert $Q \subset \mathbb{R}^{n+r+1}$, et les fonctions $\varphi_i(p)$ et $\eta_j(p)$ sont définies sur l'ensemble ouvert $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{(k+1)(n+1)}$ et ont des dérivées continues sur cet ensemble. Ainsi, le problème (3.29) contient des contraintes d'égalité et d'inégalité qui dépendent des valeurs des variables d'état non seulement aux extrémités de $[t_0, t^*]$ mais aussi aux points intermédiaires t_1, t_2, t_{k-1} . Si $k = 1$, le problème (3.29) devient le problème classique bien connu de type Pontriaguine.

Dans cette section, nous présentons une généralisation du principe du maximum de Pontriaguine à une classe de problème avec contraintes sur l'état à des instants intermédiaires, développé dans [14], où l'auteur a montré que le problème (3.29) peut se réduire à un problème de contrôle optimal standard sans contraintes intermédiaires (juste des contraintes à l'instant terminal). En établissant une correspondance entre les processus admissibles et optimaux entre les deux problèmes, les conditions d'optimalité du problème (3.29) deviennent triviales.

3.6.1 Principe du maximum d'un problème avec contraintes intermédiaires

Présentons maintenant le principe du maximum de Pontriaguine du problème (3.29). Définissons tout d'abord :

- le Hamiltonien

$$H(x, u, \psi^x, \psi_t, t) = \langle \psi^x, f(x, u, t) \rangle + \psi^t;$$

- et la fonction de Lagrange aux points intermédiaires

$$l(p) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \varphi_i(p) + \sum_{j=1}^q \beta_j \eta_j(p).$$

Théorème 3.4. [14]

Supposons que le problème (3.29) atteigne un minimum pour le processus $w^* = (x^*(t), u^*(t), p^*), t \in \Delta^* = [t_0^*, t_k^*]$. Alors il existe un multi-vecteur $\lambda = (\alpha, \beta, \psi^x(\cdot), \psi^t(\cdot))$, où $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q) \in \mathbb{R}^q$, $\psi^x(\cdot)$ et $\psi^t(\cdot)$ sont des fonctions lipschitziennes par morceaux sur $\Delta^* = [t_0^*, t_k^*]$, tels que les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) la condition de non-trivialité : $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$;

(b) la condition de non-négativité : $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{0, m}$;

(c) la condition de complémentarité : $\alpha_i \varphi_i(p^*) = 0$, $i = \overline{1, m}$;

(d) l'équation conjuguée : presque partout sur Δ^* , on a :

$$\dot{\psi}^x(t) = -H_x^* = -\psi^x(t) f_x(x^*(t), u^*(t), t),$$

$$\dot{\psi}^t(t) = -H_t^* = -\psi^x(t) f_t(x^*(t), u^*(t), t);$$

(e) la condition de transversalité aux extrémités de l'intervalle :

$$\begin{aligned} \psi^x(t_0^*) &= \frac{\partial l}{\partial x(t_0)}(p^*) = l_{x(t_0)}(p^*), & \psi^x(t_k^*) &= \frac{\partial l}{\partial x(t_k)}(p^*) = -l_{x(t_k)}(p^*), \\ \psi^t(t_0^*) &= \frac{\partial l}{\partial t_0}(p^*) = l_{t_0}(p^*), & \psi^t(t_k^*) &= \frac{\partial l}{\partial t_k}(p^*) = -l_{t_k}(p^*); \end{aligned}$$

(f) la condition de discontinuité de ψ^x et ψ^t aux points intermédiaires :

$$\begin{aligned} \Delta \psi^x(t_j^*) &= \psi^x(t_j^* + 0) - \psi^x(t_j^* - 0) = l_{x(t_j)}(p^*), \\ \Delta \psi^t(t_j^*) &= \psi^t(t_j^* + 0) - \psi^t(t_j^* - 0) = l_{t_j}(p^*), \quad j = \overline{1, k}; \end{aligned}$$

(g) pour presque tout $t \in \Delta^*$:

$$H(x^*(t), \psi^x(t), \psi^t(t), u^*(t), t) = 0;$$

(h) la condition de maximalité de H pour tout $t \in \Delta^*$:

$$\max_{\{u \text{ admissible}\}} H(x^*(t), \psi^x(t), \psi^t(t), u(t), t) = H(x^*(t), \psi^x(t), \psi^t(t), u^*(t), t) = 0.$$

3.7 Contrôle optimal des systèmes dynamiques à valeur actualisée

Dans la plupart des problèmes de sciences de gestion et d'économie, la fonction objectif est généralement formulée en termes d'argent ou d'utilité. Cette fonction a une valeur temporelle, les flux futurs d'argent ou d'utilité sont actualisés (vont perdre de la valeur).

La fonction objectif actualisée peut être écrite comme un cas particulier de (3.4) en supposant un taux d'actualisation $\rho > 0$ et en posant :

$$S(x(t^*)) = e^{-\rho t^*} \varphi(x(t^*)) \text{ et } F(x(t), u(t), t) = e^{-\rho t} \phi(x(t), u(t), t),$$

la fonctions objectif (3.4) peut s'écrire :

$$\min_{u(t)} J(u) = e^{-\rho t^*} \varphi(x(t^*)) + \int_0^{t^*} e^{-\rho t} \phi(x(t), u(t), t) dt. \quad (3.30)$$

3.7.1 Problème de contrôle optimal à valeur actualisée sans contraintes

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \min J(u) = e^{-\rho t^*} \varphi(x(t^*)) + \int_0^{t^*} e^{-\rho t} \phi(x(t), u(t), t) dt, \\ \dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0, \quad t \in [0, t^*], \\ u \in U, \end{cases} \quad (3.31)$$

où U est un compact de $\mathbb{R}^r$.

Pour ce problème, le Hamiltonien s'écrit :

$$H(x(t), \psi_0, \psi, u(t), t) = \psi_0 e^{-\rho t} \phi(x(t), u(t), t) + \psi'(t) f(x(t), u(t), t). \quad (3.32)$$

Le vecteur adjoint est donné par :

$$\dot{\psi}(t) = -H_x, \quad \psi(t^*) = \psi_0 \varphi_x(x(t^*)). \quad (3.33)$$

Soit le Hamiltonien à valeur actualisée suivant :

$$H^{va}(x(t), \psi_0, \psi^{va}(t), u(t), t) = \psi_0 \phi(x(t), u(t), t) + \psi^{va'}(t) f(x(t), u(t), t). \quad (3.34)$$

En posant :

$$\psi^{av} = e^{\rho t} \psi, \quad (3.35)$$

le Hamiltonien à valeur actualisée peut s'écrire :

$$H^{av} = e^{\rho t} H. \quad (3.36)$$

De la relations (3.35) nous obtenons :

$$\dot{\psi}^{va} = \rho e^{\rho t} \psi + e^{\rho t} \dot{\psi}. \quad (3.37)$$

En utilisant les équations (3.33), (3.35) et (3.36), l'équation (3.37) s'écrit :

$$\dot{\psi}^{va} = \rho \psi^{va} - H_x^{va}. \quad (3.38)$$

Par conséquent, nous obtenons le théorème de conditions nécessaires d'optimalité suivant :

Théorème 3.5. [15]

Soient $u^*(t) \in U$ une commande optimale et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale associée à $u^*(t)$. Alors, il existe un réel $\psi_0^* \leq 0$ et un vecteur $\psi^{va*}(t)$ tels que les équations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t), t), & x(0) = x^0, \\ \dot{\psi}^{va*}(t) - \rho \psi^{va*}(t) = -H_x^{va}(x^*(t), \psi_0^*, \psi^{va*}(t), u^*(t), t), \\ \psi^{va*}(t^*) = \psi_0^* \varphi_x(x^*(t^*)), \\ H^{va}(x^*(t), \psi_0^*, \psi^{va*}(t), u^*(t), t) \geq H^{va}(x^*(t), \psi_0^*, \psi^{va*}(t), v(t), t), \quad \forall v(t) \in U, t \in [0, t^*], \end{cases} \quad (3.39)$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au problème du contrôle optimal. Après avoir présenté quelques aspects de la formulation mathématique des problèmes de contrôle optimal, qui exige une description mathématique suffisamment générale pour qu'elle s'applique à de nombreuses situations et suffisamment simple pour qu'elle garantisse la traitabilité, nous avons rappelé les conditions nécessaires d'optimalité et celles suffisantes pour un problème de contrôle optimal sans et avec contraintes. Puis, nous avons traité le principe du maximum pour un problème de contrôle optimal avec retard. Par la suite, nous avons énoncé le principe du maximum pour un problème de contrôle optimal avec contraintes intermédiaires. Finalement, nous avons présenté le principe du maximum en termes des fonctions à valeur actualisée.

Bibliographie

- [1] F. H. Goldstine, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [2] H. J. Sussmann and J. C. Willems, *300 years of optimal control : from the brachystochrone to the maximum principle*, IEEE Control Systems Magazine, **17(3)** : 32–44, 1997.
- [3] H. J. Pesch and M. Plail, *The maximum principle of optimal control : A history of ingenious ideas and missed opportunities*, Control and Cybernetics, **38(4)** : 973–995, 2009.
- [4] A. E. Bryson, *Optimal control – 1950 to 1985*, Control Systems Magazine, IEEE, **16(3)** : 26–33, 1996.
- [5] J. A. Burns, *The Calculus of Variations and Control with Modern Applications*, CRC Press, Taylor and Francis Group, Floride, 2014.
- [6] L. M. Graves, *The Derivative as Independent Function in the Calculus of Variations*, PhD thesis, University of Chicago, Department of Mathematics, 1924.
- [7] C. Carathéodory, *Die methode der geodatischen aquidistanten und das problem von Lagrange*, Acta Mathematica, 47(3) : 199–236, 1926.
- [8] C. Carathéodory, *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*, Teubner, Leipzig, Germany, 1935.
- [9] L. M. Graves, *The Weierstrass condition for the problem of Bolza in the calculus of variations*, Ann. of Math., **33(4)** : 747–752, 1933.
- [10] D. Grass, G. Feichtinger, J. P. Caulkins, G. Tragler and D. A. Behrens, *Optimal Control of Nonlinear Processes*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.

- [11] S. P. Sethi, *Optimal Control Theory : Applications to Management Sciences and Economics*, 3rd edition, Springer Nature, Switzerland, 2019.
- [12] E. Trélat, *Contrôle optimal : théorie et applications*, Vuibert, Paris, 2005.
- [13] L. Gollman and H. Maurer, *Theory and application of optimal control Problem with multiple time-delay*, Journal of Industrial and Management Optimization, **10(2)** : 413–441, 2014.
- [14] A. V. Dmitruk and A. M. Kaganovich, *Maximum principle for optimal control problems with intermediate constraints*, Computational Mathematics and Modeling, **22(2)** : 180–215, 2011.
- [15] M. W. J. Blok and A. T. Kearney, *Dynamic Models of the Firm : Determining Optimal Investment, Financing and Production Policies by Computer*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1996.
- [16] H. J. Pesch and R. Bulirsch, *The maximum principle, Bellman's equation, and Carathéodory's work*, Journal of Optimization Theory and Applications, **80** : 199–225, 1994.
- [17] G. L. Kharatishvili, *A Maximum Principle in External Problems with Delays*, Mathematical Theory on Control, Academic Press : New York, 1967.
- [18] A. Halanay, *Optimal controls for systems with time lag*, SIAM J. Control, **6(2)** : 215–234, 1968.
- [19] F. P. Ramsey, *A Mathematical Theory of Saving*, Economic Journal, **38(152)** : 543–559, 1928.
- [20] L. S. Pontryaguine, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze and E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, John Wiley and Sons, New Jersey, 1962.
- [21] D. H. Chyung and E. B. Lee, *Linear optimal systems with time delays*, SIAM J. Control, **4(3)** : 548–575, 1966.