

Série no 2 : Introduction à la Combinatoire

Exercice 1. On considère les entiers $n \geq 0$ et $s \geq 1$. Montrer combinatoirement que :

1.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

2.

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^s)^n = \sum_{k=0}^{sn} \binom{n}{k}_s x^k.$$

Exercice 2. Répondre aux deux questions suivantes.

- Donner toutes les permutations de $\{1, 2, 3\}$ et déterminer le nombre de cycles de chaque permutation. En déduire $s(3, k)$ pour $k = 1, 2, 3$.
- Montrer que :

$$s(n, 1) = (n - 1)! \text{ et } s(n, n) = 1$$

Exercice 3. Répondre aux deux questions suivantes.

1. Montrer que :

$$S(n, 2) = 2^{n-1} - 1.$$

en construisant toutes les partitions de $\{1, 2, 3, 4\}$ en deux blocs et en les comptant.

2. Montrer que $f(n) = \sum_{k=1}^n S(n, k)$ est le nombre de partitions d'un ensemble de n éléments

Exercice 4. Répondre aux deux questions suivantes.

1. Déterminer $s(4, 1), s(4, 2), s(4, 3), s(4, 4)$.
2. Dresser le tableau de $s(n, k)$.
3. – Que signifie les deux terme

$$s(n, k - 1) \text{ et } n \times s(n, k)$$

dans la relation de récurrence

$$s(n, k) = s(n, k - 1) + n \times s(n, k).$$