

Série no 1 : Introduction à la Combinatoire

Exercice 1. 1. Montrez que dans toute suite de 10 nombres entiers distincts, il existe deux nombres dont la différence est divisible par 9.

2. Si $n + 1$ nombres sont choisis parmi $\{1, 2, \dots, 2n\}$, montrez qu'il y a toujours deux nombres consécutifs.

Exercice 2. 1. Combien de mots distincts peut-on former en réarrangeant les lettres du mot "COMBINATOIRE" ?

2. Soit l'ensemble : $A = \{a, b, c, d\}$.

— Combien y a-t-il de sous-ensembles de A de taille 2 ?

— Trouvez une bijection explicite entre l'ensemble des sous-ensembles de taille 2 et ceux de taille $|A| - 2$.

— En déduire une formule générale pour :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \quad (1)$$

Exercice 3. Soit l'alphabet $W = \{a, b, c\}$. Considérons les mots formés sur cet alphabet.

1. Soient $u = aba$ et $v = bca$. Déterminez uv et vu . La concaténation est-elle commutative ? Justifiez votre réponse.

2. Calculez $(ab)^3$ et c^5 .

3. Déduisez une règle générale pour w^k , où w est un mot quelconque et k un entier naturel.

4. Déterminez tous les facteurs de longueur 2 du mot $w = abcbac$.

5. Vérifiez si abc et acb sont des sous-mots de w .

Exercice 4. Soit la permutation :

$$\sigma = (1\ 3\ 2)(4\ 5) \in S_5. \quad (2)$$

1. Décomposez σ en transpositions.

2. Montrez que toute permutation de S_n peut s'écrire comme produit d'au plus $n - 1$ transpositions.

3. Combien de transpositions sont nécessaires pour écrire le cycle $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$?

Exercice 5. 1. Listez toutes les partitions de l'entier $n = 4$.

2. Calculez $P(5, 2)$ en utilisant la relation de récurrence :

$$P(n, k) = P(n - 1, k - 1) + P(n - k, k). \quad (3)$$

3. Utilisez la formule de Ramanujan pour estimer $P(10)$, puis comparez avec la valeur exacte.

Exercice 6. Soit la partition :

$$\lambda = (3, 2, 1). \quad (4)$$

1. Dessinez le diagramme de Ferrers de λ et son conjugué $\tilde{\lambda}$.
2. Appliquez la formule des équerres pour calculer le nombre de tableaux de Young standard de forme λ .
3. Construisez un tableau de Young semi-standard pour λ avec l'évaluation $(2, 1, 1, 1, 1)$.