
Introduction à la Combinatoire

A. Bazeniar

**Enseignant chercheur
Centre universitaire Abdelhafid Boussof
Mila, Algérie**

Se reporter à des manuels de base et à certaines livres de spécialités

Janvier 2025

Introduction

Ce cours s'adresse aux étudiants de première année de Master en Mathématiques Appliquées. Son objectif est de vous initier à la combinatoire et de vous familiariser avec les différentes méthodes de dénombrement et d'énumération. Vous y découvrirez les concepts et principes fondamentaux des deux grandes branches de la combinatoire : la combinatoire énumérative et la combinatoire bijective.

La combinatoire énumérative est une branche de la combinatoire qui lie les domaines de la logique, l'algèbre et l'analyse. Elle constitue une base essentielle pour les étudiants en mathématiques discrètes et en informatique théorique, avec de nombreuses applications pratiques. En combinant différents outils, on peut résoudre des problèmes complexes de comptage et d'optimisation.

La combinatoire bijective est une branche de la combinatoire qui se concentre sur l'établissement de bijections (c'est-à-dire des correspondances un à un) entre des ensembles combinatoires. L'objectif est de démontrer que deux ensembles ont le même nombre d'éléments en construisant explicitement une bijection entre eux, plutôt qu'en utilisant des calculs directs ou des formules.

Ce cours vous permettra d'acquérir les outils nécessaires pour aborder des problèmes concrets et développer une intuition solide en combinatoire.

Chapitre 1

Objets combinatoire

1.1 Introduction

1.2 Principes fondamentaux du comptage

1.2.1 L'addition

Définition 1.2.1. Soit A un ensemble et $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ sont des sous-ensembles de A satisfaisant,

1. $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$,
2. $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

On dit que ces ensembles partitionnent A .

Principe combinatoire de la somme : Si A_i partitionnent A , alors le nombre d'éléments dans A est la somme des nombres d'éléments de chacun des sous-ensembles,

$$|A| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$

Ceci revient à dire que si une tâche peut être complétée soit de n_1 façons ou de n_2 façons, et aucune de ces méthodes sont en commun, alors il y a $n_1 + n_2$ façons de compléter la tâche.

1.2.2 La multiplication

Définition 1.2.2. Soient A et B sont deux ensembles, on définit le produit cartésien $A \times B$ comme étant,

$$A \times B = \{(a, b); a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Exemple 1.2.1. Si $A = \{a, b, c\}$ alors,

$$A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}.$$

Principe combinatoire du produit : Si A_i sont des ensembles, alors le nombre de façons de choisir un élément de A_1 et de A_2 et ainsi de suite jusqu'à A_n est le produit du nombre d'éléments de chacun de ces ensembles,

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| |A_2| \cdots |A_n|.$$

Ceci revient à dire que s'il y a n_1 façons de compléter la tâche a_1 et n_2 façons de compléter la tâche a_2 ... et n_n façons de compléter la tâche a_n , alors il y a $n_1 n_2 \cdots n_n$ façons de compléter toutes les tâches.

Remarque 1.2.1. Dans un produit cartésien l'ordre d'un couple (a, b) est important, les couples (a, b) et (b, a) sont différents.

1.2.3 La soustraction (principe d'inclusion et d'exclusion)

Parmi 25 étudiants, 14 étudient les mathématiques, 10 étudient l'informatique, et 5 étudient les deux. Combien y a-t-il d'étudiants qui n'étudient ni les mathématiques ni l'informatique? Nous devons avoir $14 - 5 = 9$ personnes qui étudient les mathématiques mais pas l'informatique. Et $10 - 5 = 5$ personnes qui étudient l'informatique mais pas les mathématiques. Il reste donc $25 - (9 + 5 + 5) = 6$ personnes qui n'étudient ni les mathématiques ni l'informatique.

On peut obtenir ce résultat facilement en utilisant le principe d'inclusion-exclusion qui donne le nombre d'étudiants ne possédant pas ces deux propriétés, $25 - 14 - 10 + 5 = 6$.

Principe combinatoire de l'inclusion-exclusion : Si A_1 et A_2 sont deux ensembles de A , alors on inclue l'ensemble entier, ensuite on exclue (soustraie) les ensembles simples A_1 et A_2 , et enfin on inclue (ajoute) l'intersection des 2 ensembles $A_1 \cap A_2$,

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |A| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|.$$

Soit S_k la somme des cardinalités de toutes les intersections de k -uples des A_i . On généralise la formule d'inclusion-exclusion de façon alternative comme suit [T12],

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = |A| - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^k S_k + \cdots + (-1)^n S_n. \quad (1.1)$$

1.2.4 L'égalité (la bijection)

Le principe de la bijection fait que deux problèmes ont la même solution.

Définition 1.2.3. Une fonction $f : A \longrightarrow B$ est dite injective si elle vérifie,

$$\forall (x, x') \in A, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Sens combinatoire : Si deux objets ne sont pas affectés à la même boîte, alors la fonction est univoque, ou injective.

Définition 1.2.4. Une fonction $f : A \longrightarrow B$ est dite surjective si elle vérifie,

$$\forall y \in B, \exists x \in A, f(x) = y.$$

Sens combinatoire : Le placement d'objets de l'ensemble A dans les boîtes de l'ensemble B ne laisse aucune boîte vide.

Définition 1.2.5. Une fonction $f : A \longrightarrow B$ est une bijection si c'est une injection et une surjection.

Le principe de la bijection : Deux ensembles ont la même cardinalité si et seulement s'il existe une bijection entre les deux ensembles. Le principe est en fait applicable à n'importe quel ensemble, peu importe leur cardinalité.

Exemple 1.2.2. Soit $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un ensemble de n éléments. Soit 2^S l'ensemble de tous les sous-ensembles de S , et soit :

$$\{0, 1\}^n = \{(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) : \epsilon_i = 0 \text{ ou } 1\}. \quad (1.2)$$

Puisqu'il y a deux valeurs possibles pour chaque ϵ_i , on a :

$$\#\{0, 1\}^n = 2^n. \quad (1.3)$$

Nous définissons maintenant une application :

$$\Phi : 2^S \rightarrow \{0, 1\}^n, \Phi(T) = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n),$$

où :

$$\epsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i \in T, \\ 0, & \text{si } x_i \notin T. \end{cases}$$

Par exemple Si $n = 5$ et $T = \{x_2, x_4, x_5\}$, alors $\Phi(T) = (0, 1, 0, 1, 1)$.

Il est facile de voir que Φ est bijective, ce qui signifie que nous avons donné une **preuve combinatoire** du fait que :

$$\#2^S = 2^n. \quad (1.4)$$

En plus, si A et B sont des ensembles finis, respectivement de cardinalités n et k , alors on a les égalités suivantes,

$$\begin{array}{ll} 1) |B^n| = k^n, & 2) |\text{Fonction}[A, B]| = k^n, \\ 3) |\text{Surj}[A]| = n!, & 4) |\text{Inj}[A, B]| = k^n. \end{array}$$

Rappelons nous les notions suivantes (x une variable),

- Factorielle décroissante : $x^{\bar{k}} = x(x-1)(x-2) \cdots (x-k+1)$,
- factorielle croissante : $x^{\bar{k}} = x(x+1)(x+2) \cdots (x+k-1)$.

1.2.5 Existence

Principe des tiroirs de Dirichlet ou principe du pigeonnier, est un principe mathématiques particulièrement simple à énoncer et à comprendre, et qui a plusieurs applications particulièrement intéressantes en mathématiques. Ce principe a été appliqué pour la première fois par Peter Dirichlet en 1834. Il nous permet de répondre aux questions de la forme "Il existe au moins un...".

Le principe du pigeonnier : Si on souhaite placer $n + 1$ objets ou plus dans n boites, alors au moins une boite contiendra deux objets ou plus.

Exemple 1.2.3. On veut montrer que dans une classe de 13 étudiants, au moins deux étudiants sont né le même mois. Les boites sont les mois et les objets sont les étudiants. Le principe du pigeonnier nous affirme donc qu'au moins un mois de l'année désigne plus qu'un étudiant. c'est à dire qu'au moins deux étudiants sont né le même mois.

1.3 Structures élémentaires

Définition 1.3.1. Une classe combinatoire est un ensemble $\mathcal{A}$ fini ou dénombrable sur lequel une application de taille est définit,

$$|\cdot| : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N},$$

qui associe à chaque élément $a \in \mathcal{A}$ un entier $|a|$. Régulièrement, on dénote $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des objets a_n de taille n qui utilisent les mêmes éléments de $\mathcal{A}$.

Dans une classe combinatoire, on cherche une formule explicite qui compte le nombre d'objets de taille n , sous certaines conditions. Cependant, une telle formule n'est pas toujours facile à déterminer d'une façon directe. Associer une fonction génératrice ordinaire au problème qui code le nombre des objets comme le nombre d'occurrences de z^n est une étape importante dans le processus de la solution voir chapitre 3.

Exemple 1.3.1. Soit $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. L'ensemble de tous les objets est,

$$(\mathcal{A}_n)_{n \geq 0} = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots, 110010, \dots\}.$$

Le nombre d'objets possibles de taille n est,

$$|\mathcal{A}_n| = 2^n.$$

1.3.1 Choisir des objets

On s'intéresse au problème de choisir k objets parmi un ensemble de n objets. Pour résoudre le problème, on est en présence de 4 cas par rapport à l'ordre et la remise comme le montre le tableau au dessous.

Choisir k objets parmi n		
	Sans remise	Avec remise
Sans ordre	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
Avec ordre	$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$	n^k

Maintenant, on s'intéresse au nombre de permutations de n_1 objets de type 1, n_2 objets de type 2, n_3 objets de type 3, $\dots$, n_k objets de type k . On appelle ce nombre par le coefficient multinomial donné par la formule,

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!}. \quad (1.5)$$

1.3.2 Mots

Définition 1.3.2. Un alphabet W , est simplement un ensemble fini de lettres.

Définition 1.3.3. Un mot de longueur n sur l'alphabet W est une suite de n lettres,

$$w = w_1 w_2 \dots w_n, \quad w_i \in W.$$

On dénote :

- $|w|$ la longueur d'un mot qu'est le nombre de lettres qu'il contient.
- W^n l'ensemble de tous les mots de longueur n .
- W^* l'ensemble de tous les mots, c.-à-d. : $W^* = \sum_{n=0}^{\infty} W^n$.
- Le mot $w = abccddwzzz$ a pour évaluation $abc^2d^2wz^3$.

Exemple 1.3.2. Soit $W = \{a, b\}$, on a donc :

$$W^2 = \{aa, ab, ba, bb\},$$

$$W^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, abb, bbb, baa, bba, \dots\}.$$

1.3.2.1 Opérations sur les Mots

Définition 1.3.4. (Concaténation)

La concaténation de deux mots $u = u_1u_2 \cdots u_m$ et $v = v_1v_2 \cdots v_n$ est le mot :

$$uv = u_1u_2 \cdots u_mv_1v_2 \cdots v_n. \quad (1.6)$$

La concaténation est une opération associative mais non commutative.

Définition 1.3.5. (Puissance d'un Mot)

Pour un mot w et un entier $k \geq 0$, la puissance w^k est définie par :

$$w^k = \underbrace{ww \cdots w}_{k \text{ fois}}. \quad (1.7)$$

Par convention, $w^0 = \epsilon$, où ϵ est le mot vide.

Définition 1.3.6. (Facteur et Sous-Mot)

Un facteur d'un mot w est une sous-suite de lettres consécutives de w .

Un sous-mot est une sous-suite de lettres de w , pas nécessairement consécutives.

Exemple 1.3.3. Soit $w = abcabc$ un mot, on a donc :

ab est un sous-mot :préfixe, bc est un sous-mot :suffixe et bca un facteur.

1.3.3 Partitions

Définition 1.3.7. Une partition de l'entier n est une suite d'entiers positifs écrit sous la forme,

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \quad \text{ou} \quad \lambda = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_k,$$

avec,

1. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$,
2. $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$.

Et on dénote,

- $\lambda \vdash n$: la partition (partage) de n ,
- λ_i : les parts de λ ,
- $l(\lambda) = l$: la longueur de la partition,
- $\mathcal{P}(n)$: l'ensemble des partitions de n ,
- $P(n)$: le nombre de partitions de n ,
- $P(n, k)$: le nombre de partitions de n avec exactement k parts,
- $P(n, k, j)$: le nombre de partitions de n avec k parts dont la plus grande est $\leq j$,
- On peut écrire $\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, l^{m_l})$, m_i est la multiplicité de i dans λ .

Exemple 1.3.4. 1. Le partage de l'entier 50 peut s'écrire comme,

$$50 = (9, 8, 8, 7, 5, 5, 5, 3), \quad \text{ou} \quad 50 = 98875553.$$

2. On détermine l'ensemble des partitions des entiers 0, 3 et 6 comme suits,

$$\mathcal{P}(0) = \{0\},$$

$$\mathcal{P}(3) = \{3, 21, 111\},$$

$$\mathcal{P}(6) = \{6, 51, 42, 33, 411, 321, 222, 3111, 2211, 21111, 111111\}.$$

3. On calcul aussi,

$$P(6) = 11, P(6, 1) = P(6, 5) = P(6, 6) = 1, P(6, 2) = 3, P(6, 3) = 3 \text{ et } P_4(6) = 2, \\ P(6, 3, 3) = 3, P(6, 2, 3) = 1, \text{ et ainsi de suite.}$$

Le nombre de partitions de n en k parts vérifie la relation de récurrence suivante,

$$P(n, k) = P(n - 1, k - 1) + P(n - k, k),$$

avec $P_0(0) = 1$.

On dispose pas d'une formule exacte (simple) pour calculer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(n)$. Cependant, une formule approximative remarquable a été donnée par l'indien Srinivasa Ramanujan,

$$P(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp(\pi\sqrt{2n/3}). \quad (1.8)$$

On peut définir algébriquement le nombre de partitions par la fonction génératrice suivante,

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)} = 1 + P(1)x + P(2)x^2 + \cdots + P(k)x^k. \quad (1.9)$$

Remarque 1.3.1. Hardy et Ramanujan ont donné une formule exacte plus complexe et modifiée plus tard par Rademacher en 1937.

1.3.4 Permutations

Définition 1.3.8. Une permutation σ de taille n est une bijection entre l'ensemble $E = \{1, 2, \dots, n\}$ et lui-même. Une permutation σ de E est,

$$\sigma = \{(i, \sigma_i) \mid i \in E\}.$$

L'ensemble des permutations est noté $S[E]$. Le cardinal de $S[E]$ est $n!$. On peut représenter une permutation comme,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n.$$

On note l'ensemble de permutations d'un ensemble de cardinalité n par *permutation de S_n* .

Exemple 1.3.5. Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Le nombre de permutations est $4! = 24$.

$$\begin{aligned} [4] = \{ & 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, \\ & 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431 \\ & 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421 \\ & 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321 \}. \end{aligned}$$

Par exemple On choisit une permutation σ de $[4]$ et on l'écrit sous forme matricielle,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Inversions d'une permutation de $[n]$: On dit qu'un couple $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ forme une inversion de la permutation σ si,

$$i < j \quad \text{alors} \quad \sigma_i > \sigma_j.$$

On dénote $inv(\sigma)$ le nombre d'inversion de σ . Par exemple le nombre des inversions de l'ensemble de permutation $[4]$ est,

$inv(\sigma)$	σ
0	1234
1	1243, 1324, 2134,
2	1342, 1423, 2143, 2314, 3124
3	1432, 2341, 2413, 3142, 3214, 4123
4	2431, 3241, 3412, 4132, 4213
5	3421, 4231, 4312
6	4321

1.3.5 Orbites, décomposition en cycles

Définition 1.3.9. On appelle orbite la partition $\mathcal{O}_\sigma$ de E qui a comme parts les sous-ensembles,

$$\mathcal{O}(\sigma_i) = \{\sigma^k(i), k \in \mathbb{Z}\} \text{ pour tout } i \in E.$$

Exemple 1.3.6. Reprenant la permutation précédente $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. On a,

$$\mathcal{O}(1) = \{1, \sigma^1(1), \sigma^2(1)\} = \{1, 2, 3\}, \quad \mathcal{O}(4) = \{4\}.$$

La permutation σ admet 2 orbites.

Définition 1.3.10. On dit qu'une permutation σ est circulaire de E , si

$$\mathcal{O}_{\sigma_i} = E, \quad \forall i \in E.$$

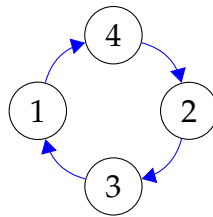


FIGURE 1.1 – Une permutation circulaire.

Définition 1.3.11. Le support d'une permutation σ est l'ensemble définie par,

$$\text{supp}(\sigma) = \{1 \leq i \leq n \mid \sigma_i \neq i\}. \quad (1.10)$$

Pour l'exemple 1.3.6, $\text{supp}(\sigma) = \{1, 2, 3\}$.

Définition 1.3.12. Le point i est dit point fixe pour σ si,

$$\sigma(i) = i.$$

Dans l'exemple 1.3.6, le nombre 4 est un point fixe.

Définition 1.3.13. Un cycle de longueur l ($2 \leq l \leq n$) est une permutation σ , tel que

1. $\text{supp}(\sigma) = \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$,
2. $\sigma_{i_j} = i_{j+1}$ et $\sigma_{i_{l-1}} = i_1$, avec $j = 1, 2, \dots, l-1$.

Ce cycle de longueur l est noté $(i_1, i_2, \dots, i_l)$.

Définition 1.3.14. Une permutation σ de taille n est un cycle si tous ses éléments appartiennent à la même orbite (Une autre définition).

Remarque 1.3.2. La démarche à suivre pour construire les différents cycles de longueur n , c'est de prendre l'élément 1 comme point fixe et faire permuer les autres $n - 1$ éléments.

- Le nombre de cycles de longueur 4 d'une permutation $[4]$ est,

$$\{(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\}.$$

- Le nombre de cycles de longueur 2 d'une permutation $[4]$ s'écrit en cycles disjoints comme suit,

$$\{(1)(234), (1)(243), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (134)(2), (143)(2), \\ (124)(3), (142)(3), (123)(4), (132)(4)\}.$$

Remarque 1.3.3. 1. Le nombre de permutations de $[n]$ à un cycle de longueur n égale $(n - 1)!$.
2. Le nombre de permutations de $[n]$ composées de k cycles disjoints égale au nombre de Stirling de première espèce $c(n, k)$.

1.3.6 Groupe symétrique

Définition 1.3.15. Une transposition τ est une permutation qui échange deux éléments distincts, en fixant les autres. On note $\tau(ab)$ la transposition τ qui change a et b , définie par,

$$\tau(a) = b, \tau(b) = a \text{ et } \tau(i) = i, \forall i \notin \{a, b\}. \quad (1.11)$$

Exemple 1.3.7. La transposition (13) de la permutation 143265 est la permutation 341265.

Définition 1.3.16. Soit E un ensemble non vide. On appelle groupe symétrique sur E , l'ensemble $\mathfrak{S}_E$ des bijections de E dans E , muni d'une loi de composition et d'un élément neutre. Les éléments de E sont les permutations possibles.

Exemple 1.3.8. Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. σ et μ sont des permutations de E , alors

$$\sigma = 2314 \in \mathfrak{S}_4, \text{ et } \mu = 4312 \in \mathfrak{S}_4.$$

Les compositions de $\sigma \circ \mu$, $\mu \circ \sigma$ et σ^{-1} sont,

$$\sigma \circ \mu = 4123,$$

$$\mu \circ \sigma = 3142,$$

$$\sigma^{-1} = 3124.$$

En appliquant la transposition τ sur les paires d'éléments de l'ensemble E , alors le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sera construit.

1.3.7 Diagrammes de Ferrers

Définition 1.3.17. Un diagramme de Ferrers F est un ensemble de n points du plan, ayant les coordonnées (i, j) entières, tels que $(i, j) \in F$. On écrit,

$$F = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq j \leq k-1 \text{ et } 0 \leq i \leq \lambda_j - 1\},$$

avec $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ une partition de l'entier n .

Définition 1.3.18. Si on transpose les lignes et les colonnes d'un diagramme de Ferrers d'une partition λ , on obtient un diagramme de Ferrers d'une autre partition $\tilde{\lambda}$. Ce diagramme est appelé le diagramme conjugué. Le partage $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3, \dots)$ dont $\tilde{\lambda}_i$ est le nombre de parts de λ qui sont $\geq i$.

Exemple 1.3.9. Le diagramme de Ferrers pour $n = 14$, $\lambda = (4, 3, 1, 1)$ et la partition conjuguée $\tilde{\lambda} = (4, 2, 2, 1)$ sont,

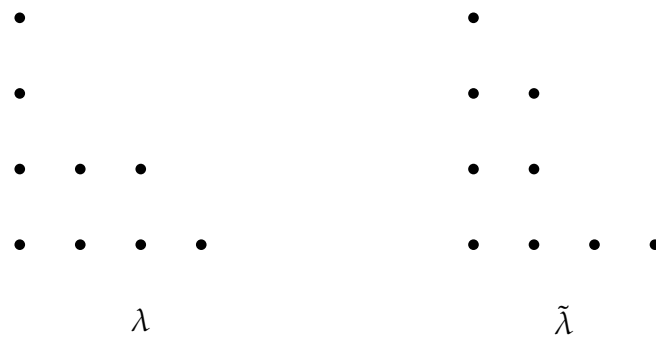


FIGURE 1.2 – Diagramme de Ferrers et leur conjugué.

1.3.8 Tableaux de Young

Définition 1.3.19. Si on remplace les points par des carrés juxtaposés dans le diagramme de Ferrers, alors on appelle le diagramme résultant le diagramme de Young.

Définition 1.3.20. Un tableau de Young T semi-standard (TSS) est un remplissage du diagramme de Ferrers de λ tel que les entrées (entiers) soient croissantes au sens large sur les lignes de la gauche vers la droite, et soient strictement croissantes sur les colonnes du bas vers le haut, c'est-à-dire

$$\{T(i, j) \leq T(i+1, j)\} \quad \text{et} \quad \{T(i, j) < T(i, j+1)\}.$$

Exemple 1.3.10. Un des tableaux de Young semi-standard pour $n = 13$ et $\lambda = (5, 4, 2, 2)$ est représenté dans la Figure 1.3.

8	8			
4	4			
2	2	12	7	
1	1	3	4	9

FIGURE 1.3 – Tableau de Young semi-standard.

On peut lire dans le tableau de Young de deux façons. La première est la lecture ligne, en lisant les lignes de T de la gauche vers la droite et du bas vers le haut. La deuxième est la lecture diagonale de T , en lisant du bas vers le haut sur chaque diagonale D_k , dans l'ordre décroissant des k . L'évaluation d'un diagramme de Young T de taille n est une composition $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, où μ_i est le nombre d'occurrences de la lettre i dans T .

Exemple 1.3.11. On lit le diagramme de la Figure 1.3 comme suit,

- La lecture ligne : 11349 | 22127 | 44 | 88,
- La lecture diagonale : 8 | 48 | 24 | 12 | 112 | 37 | 4 | 9,
- L'évaluation : $(2, 2, 1, 3, 0, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 1, 0)$.

Définition 1.3.21. Le nombre de Kostka $K_{\lambda\mu}$ est le nombre de tableaux de Young de forme λ et d'évaluation μ .

Définition 1.3.22. Un tableau de Young T standard est le tableau ayant pour lecture ligne une permutation $(\mu = (1, 1, \dots, 1))$.

1.3.8.1 Formule d'équerres

La formule des équerres est une formule qui permet de calculer le nombre de tableaux de Young standard de λ , due à Frame. L'équerre $H_{i,j}$ est défini par les cellules se trouvant à la

8	11			
4	10			
2	6	12	13	
1	3	5	7	9

FIGURE 1.4 – Tableau de Young standard.

droite de (i, j) sur la ligne i et au-dessus de (i, j) sur la colonne j et la cellule (i, j) elle-même. l'équerre correspondant est,

$$H_{i,j} = \{(i, j)\} \cup \{(i, j') | j' > j\} \cup \{(i', j) | i' > i\},$$

où $h_{i,j} = |H_{i,j}|$ la longueur de l'équerre partant de la cellule (i, j) .

Exemple 1.3.12. L'équerre partant de l'étoile est de longueur 4, on a donc $h_{2,1} = 4$.

.				
★	.	.		

Théorème 1.3.1 (Formule des équerres). Soient $n \in \mathbb{N}$ et λ une partition de n . Alors on a la formule suivante qui calcule le nombre de tableaux de Young standard de forme λ ,

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_{i,j}}, \quad (1.12)$$

où le produit porte sur toutes les cases du tableau de Young de forme λ .

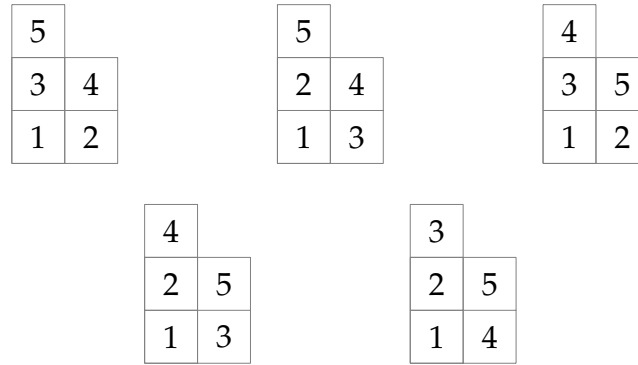
Exemple 1.3.13. Pour le partage $(2, 2, 1) \vdash 5$, on a

.	
.	.
.	.

$$f^{(2,2,1)} = \frac{5!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1} = 5 \text{ tableaux standards de la forme } (2, 2, 1).$$

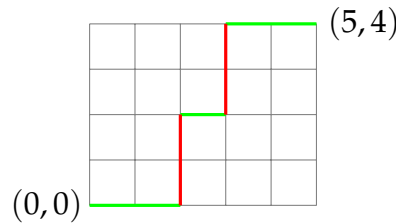
1.3.9 Chemins dans le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

L'étude des chemins dans la combinatoire énumérative est intéressante, et des applications importantes existent dans presque tous les domaines des mathématiques [H10, HKS03, K65, M79]. On trouve dans [BA17] un aperçu général sur les résultats récents sur le sujet.

FIGURE 1.5 – Tous les tableaux standards de forme $(2, 2, 1)$.

Définition 1.3.23. Un chemin nord-est $P = (p_0, p_1, \dots, p_n)$, dans le plan discret $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, est une suite des pas (nord-est) qui commence par l'origine $(0, 0)$ et se termine au point (k, n) , tel que

$$(i, j) = \begin{cases} (i-1, j-1) + (0, 1), & \text{pas verticale (nord);} \\ (i-1, j-1) + (1, 0), & \text{pas horizontale (est).} \end{cases}$$

FIGURE 1.6 – Un chemin nord-est de $(0,0)$ à $(5,4)$.

L'ensemble des chemins dans un plan de k pas horizontales et n pas verticales est énuméré par les coefficients binomiaux $\binom{n+k}{k}$. En d'autre terme, les coefficients binomiaux énumèrent tous les chemins allant de $(0,0)$ au point $(n-k, k)$.

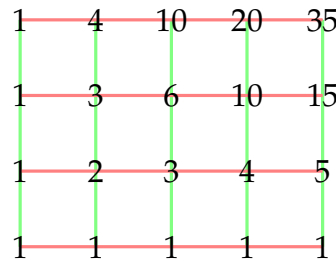
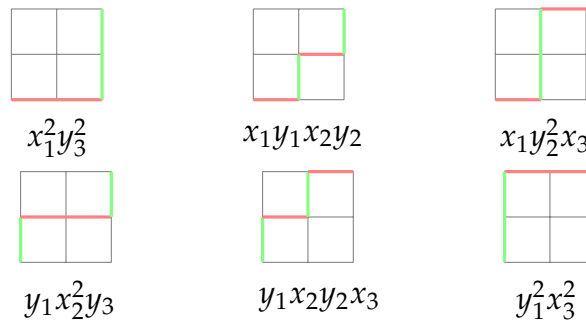


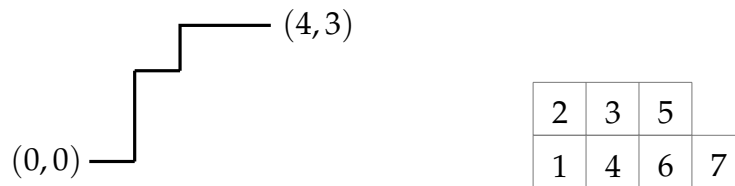
FIGURE 1.7 – Les nombres de chemins

On peut représenter un chemin sous la forme d'un mot ω construit par la concatenation des deux alphabets $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Les x_i sont les pas horizontaux dans le niveau i ($i = \overline{1, n}$), et les y_j sont les pas verticaux dans le niveau j ($j = \overline{1, m}$) (voir 1.8).

FIGURE 1.8 – Tous les chemins de $(0,0)$ à $(2,2)$ et les mots correspondants.

1.3.9.1 Correspondance entre tableaux de Young et chemins

Dans un tableau standard de Young de partition $\lambda = (k, n)$, les cases sont remplies de gauche à droite dans chaque ligne. Si le i ème pas dans le chemin P est un pas horizontal, entrer le i dans la première case non remplie de la première ligne. S'il s'agit d'un pas vertical, entrer le i dans la première case non remplie de la deuxième ligne. L'illustration suivante assure cette correspondance,

FIGURE 1.9 – Correspondance entre un tableau de $\lambda = (4,3)$ et un chemin de $(0,0)$ à $(4,3)$.

1.3.9.2 Aire de chemin

Soit $h(p_i)$ le nombre de cases qui se trouvent sous le pas horizontal p_i .

Définition 1.3.24. L'aire de P est le nombre de cases (dont l'aire est l'unité de surface) qui se trouvent sous le chemin, c-à-d :

$$\text{Aire}(P) := \sum_{p_i \text{ horizontal}} h(p_i) \quad (1.13)$$

Exemple 1.3.14. L'aire de l'exemple dans la Figure 1.6 est égal 10.

Définition 1.3.25. L'énumération de cette aire associée au chemin P donne les coefficients q -binomiaux,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \sum q^{\text{Aire}(P)}.$$

Exemple 1.3.15. Pour $n = 4$ et $k = 2$ on présente les 6 chemins, et le polynôme correspondant,

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_q = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4.$$

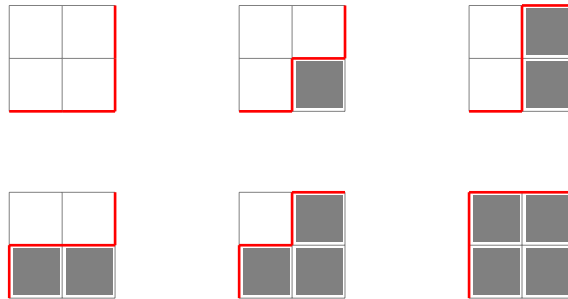


FIGURE 1.10 – Tous les chemins et l'aires correspondantes de $(0,0)$ à $(2,2)$.