

Équation de transfert radiatif
Transfert de chaleur et de masse approfondi
1 ère année Master génie mécanique
Énergétique

Pr. S. Saouli
Département de génie mécanique
Institut des Sciences et de Technologies
Université Abdelhafid Boussouf, Mila

Équation du transfert radiatif

1. Définitions des grandeurs fondamentales du champ de rayonnement

1. 1. Intensité spécifique

La quantité d'énergie rayonnante dE_ν dans l'intervalle des fréquences $[\nu, \nu + d\nu]$ émise par une surface dA dans un angle solide $d\omega$ et pendant le temps dt est

$$dE_\nu = I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \cos \theta d\nu dA d\omega dt \quad (\text{VII.1})$$

où θ est l'angle compris entre la direction du rayonnement et le vecteur unitaire normal $\vec{n}$ à la surface émettrice dA et $I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ est l'intensité spécifique.

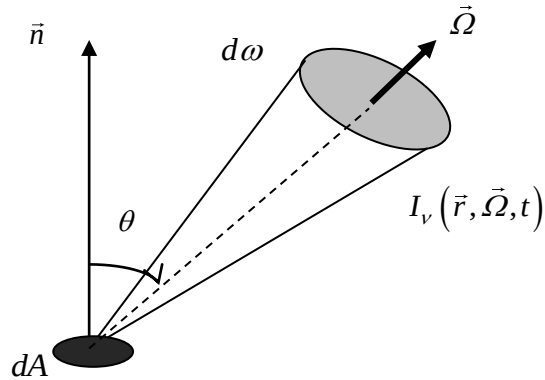


Figure VII. 1. Définition de l'intensité spécifique $I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$.

Comme l'intensité spécifique $I_v(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ est fonction du vecteur position $\vec{r}$ et du vecteur de direction $\vec{\Omega}$, nous pourrions alors, dans le cas des coordonnées cartésiennes (x, y, z) , écrire

$$I_v(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = I_v(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t) \quad (\text{VII.2})$$

où (α, β, γ) sont les cosinus directeurs du vecteur direction.

Le champ de rayonnement est dit isotrope en un point, si l'intensité spécifique est indépendante de la direction en ce point. Si l'intensité spécifique est la même en tous les points et les toutes les directions, le champ de rayonnement est dit alors homogène et isotrope.

Si le milieu en question est une stratification de couches planes et parallèles où les propriétés physiques sont invariantes sur chaque couche. Dans ce cas, l'intensité spécifique peut s'écrire

$$I_v(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = I_v(z, \theta, \varphi, t) \quad (\text{VII.3})$$

où z est la hauteur dans la direction normale au plan de stratification et θ et φ sont les angles polaire et azimutal respectivement.

Si l'intensité spécifique $I_v(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ est indépendante de l'angle φ , le champ de rayonnement aura une symétrie axiale autour de l'axe z .

Un autre cas très intéressant est celui de la présence d'une symétrie sphérique où

$$I_v(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = I_v(r, \theta, t) \quad (\text{VII.4})$$

où r est la distance du centre de symétrie et θ est l'inclinaison de la direction considérée avec le rayon vecteur.

L'intensité intégrale $I(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ est obtenue en intégrant l'intensité spécifique $I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ sur toutes les fréquences, ainsi

$$I(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \int_0^\infty I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) d\nu \quad (\text{VII.5})$$

Bien qu'en pratique, l'intensité spécifique $I_\nu(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, t)$ soit suffisante pour décrire le champ de rayonnement, il sera important de noter que des paramètres de polarisation qui caractérisent le champ de rayonnement doivent être spécifiés avant de prétendre que la description de ce champ est réellement complète.

1. 2. Flux net

L'équation VII. 1 donne La quantité d'énergie rayonnante dE_ν dans l'intervalle des fréquences $[\nu, \nu + d\nu]$ émise par une surface dA dans un angle solide $d\omega$ et pendant le temps dt . Le flux net dans toutes les directions est alors

$$d\nu dA dt \int I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \cos \theta d\omega \quad (\text{VII.6})$$

où l'intégration est effectuée sur tous les angles solides.

La quantité

$$\pi F_\nu = \int I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \cos \theta d\omega \quad (\text{VII.7})$$

qui apparait dans l'équation VII. 6 est appelée le flux net et définit le taux d'écoulement de l'énergie rayonnante à travers la surface dS par unité de surface et par unité d'intervalle de fréquence ν .

Pour un système avec des coordonnées polaires avec l'axe z dans la direction du vecteur normal à la surface dA

$$d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (\text{VII.8})$$

et le flux net s'écrit

$$\pi F_v = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} I_v(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi \quad (\text{VII.9})$$

Pour un champ de rayonnement qui un axe de symétrie, le flux net le long de l'axe de symétrie est

$$\pi F_v = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} I_v(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi \quad (\text{VII.10})$$

$$\pi F_v = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I_v(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta = 2\pi \int_0^\pi I_v(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta$$

soit

$$F_v = 2 \int_0^\pi I_v(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (\text{VII.11})$$

1. 3. Densité du rayonnement

Considérons deux régions ν et Σ de sorte que la dernière soit plus large en dimensions linéaires que la première mais suffisamment petites de sorte que le pinceau de rayonnement soit pas affecté lors de son passage. Le rayonnement passant dans la région ν est obligatoirement traversé la région Σ à travers un certain élément $d\Sigma$ de vecteur normal unitaire $\vec{N}$.

L'énergie rayonnante traversant l'élément de surface $d\Sigma$ qui passe aussi à travers l'élément de surface dA dans région ν par unité de temps est

$$I_v(\vec{\Omega}, \vec{N}) d\Sigma d\omega' d\nu \quad (\text{VII.12})$$

où

$$d\omega' = \frac{\vec{\Omega} \cdot \vec{n}}{r^2} dA \quad (\text{VII.13})$$

Si à l'intérieur de la région ν , la longueur parcourue par le pinceau de rayonnement est L , la quantité d'énergie rayonnante

$$I_\nu(\vec{\Omega}, \vec{N}) \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) dA d\Sigma d\nu L}{r^2 c} \quad (\text{VII.14})$$

traversera le même élément pendant le temps $\frac{L}{c}$ où c est la vitesse de la lumière.

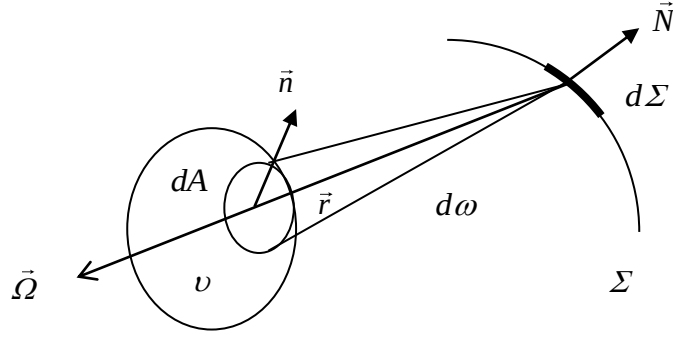


Figure VII. 2. Schéma pour définir la densité d'énergie du rayonnement.

L'angle solide $d\omega$ défini par l'élément de surface $d\Sigma$ et le volume intercepté dans la région ν par le pinceau de rayonnement sont

$$d\omega = \frac{\vec{\Omega} \cdot \vec{N}}{r^2} d\Sigma \quad (\text{VII.15})$$

$$d\nu = (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) L dA \quad (\text{VII.16})$$

Avec ces deux définitions, la quantité d'énergie rayonnante devient

$$\frac{1}{c} I_\nu d\omega d\nu d\nu \quad (\text{VII.17})$$

Par conséquent, la contribution à l'énergie rayonnante par unité de volume et par unité de fréquence émanant dans l'angle solide $d\omega$ autour de la direction $\vec{\Omega}$ est

$$\frac{1}{c} I_\nu d\omega \quad (\text{VII.18})$$

et la densité d'énergie rayonnante u_ν s'écrit

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\omega \quad (\text{VII.19})$$

Il est souvent pratique d'introduire l'intensité moyenne

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\omega \quad (\text{VII.20})$$

qui sera reliée à la densité d'énergie par la relation

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu \quad (\text{VII.21})$$

Pour un champ de rayonnement à symétrie axiale, l'intensité moyenne s'écrit

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\nu \sin \theta d\theta d\varphi \quad (\text{VII.22})$$

soit

$$J_\nu = \frac{1}{2} \int_0^\pi I_\nu \sin \theta d\theta \quad (\text{VII.23})$$

Si nous introduisons la variable

$$\mu = \cos \theta \quad (\text{VII.24})$$

et sachant que

$$d\mu = -\sin \theta d\theta \quad (\text{VII.25})$$

la relation VII. 23

$$J_\nu = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\mu) d\mu \quad (\text{VII.26})$$

soit

$$J_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\mu) d\mu \quad (\text{VII.27})$$

1. 4. Pression de rayonnement

Un quanta d'énergie rayonnante a une énergie $h\nu$ et une quantité du mouvement $\frac{h\nu}{c}$ où h et c sont, respectivement, la constante de Planck et la vitesse de la lumière.

La pression de rayonnement est obtenue à partir du taux net du transfert de la quantité du mouvement perpendiculaire à la surface dA contenant le point P .

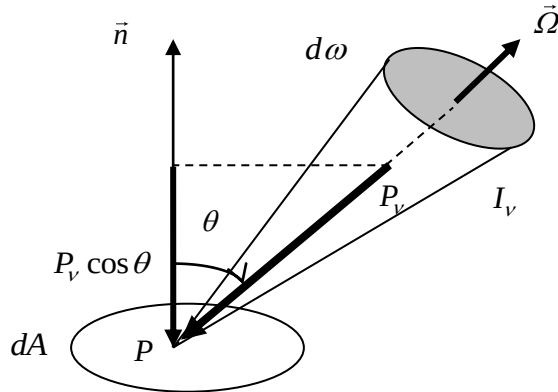


Figure VII. 3. Définition de la pression du rayonnement.

La quantité d'énergie rayonnante dans l'intervalle des fréquences $[\nu, \nu + d\nu]$ incidente sur la surface dA et faisant un angle θ avec sa normale $\vec{n}$ dans un angle solide $d\omega$ et pendant le temps dt est

$$dE_\nu = I_\nu \cos \theta d\nu dA d\omega dt \quad (\text{VII.28})$$

La quantité du mouvement associée à cette énergie rayonnante dans la direction $\vec{\Omega}$ est

$$dP_\nu = \frac{I_\nu}{c} \cos \theta d\nu dA d\omega dt \quad (\text{VII.29})$$

La composante normale de la quantité du mouvement du rayonnement transmise à la surface dA est par conséquent

$$dP'_\nu = \frac{I_\nu}{c} \cos^2 \theta d\nu dA d\omega dt \quad (\text{VII.30})$$

ainsi, la pression exercée normalement à la surface dA par le rayonnement dans l'intervalle des fréquences $[\nu, \nu + d\nu]$ devient

$$dp_\nu d\nu dA dt = \frac{I_\nu}{c} \cos^2 \theta d\nu dA d\omega dt \quad (\text{VII.31})$$

soit

$$dp_\nu = \frac{I_\nu}{c} \cos^2 \theta d\omega \quad (\text{VII.32})$$

par conséquent

$$p_\nu = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\nu \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi \quad (\text{VII.33})$$

Si le rayonnement est isotrope, il vient alors

$$p_\nu = \frac{2\pi}{c} I_\nu \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \quad (\text{VII.34})$$

ou encore

$$p_v = \frac{2\pi}{c} I_v \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu = \frac{4\pi}{3c} I_v \quad (\text{VII.35})$$

en tenant compte de la relation VII. 21, nous obtenons

$$p_v = \frac{u_v}{3} \quad (\text{VII.36})$$

1. 5. Moments du champ de rayonnement

Le n ème moment $M_n(z, n)$ du champ de rayonnement est défini par la relation

$$M_n(z, n) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_v(z, \mu) \mu^n d\mu \quad (\text{VII.37})$$

Ils existent trois types de moments du champ de rayonnement qui sont :

a) Moment zéro (intensité moyenne)

$$J_v(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_v(z, \mu) d\mu \quad (\text{VII.38})$$

b) Premier moment (flux d'Eddington)

$$H_v(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_v(z, \mu) \mu d\mu \quad (\text{VII.39})$$

Comme $\mu = \cos \theta$ et $d\mu = -\sin \theta d\theta$, l'intégrale VII. 11 devient

$$F_v = 2 \int_{-1}^1 I_v(\mu) \mu d\mu \quad (\text{VII.40})$$

et cela conduit à l'expression

$$H_\nu(z) = \frac{F_\nu}{4} \quad (\text{VII.41})$$

c) Second moment (l'intégrale K)

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu) \mu^2 d\mu \quad (\text{VII.42})$$

De la même façon, sachant que $\mu = \cos \theta$ et $d\mu = -\sin \theta d\theta$, l'intégrale VII. 35 s'écrit

$$p_\nu = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I_\nu(\mu) \mu^2 d\mu \quad (\text{VII.43})$$

ce qui nous conduit à la relation

$$K_n(z) = \frac{c}{4\pi} p_\nu \quad (\text{VII.44})$$

ou bien en vertu de l'équation VII. 36 à la relation

$$K_n(z) = \frac{c}{12\pi} u_\nu \quad (\text{VII.45})$$

1. 6. Coefficient d'extinction : absorption vraie et dispersion

Un pinceau de rayonnement d'intensité I_ν s'atténue quand il traverse un milieu d'épaisseur ds et son intensité devient

$$dI_\nu = -\kappa_\nu I_\nu ds \quad (\text{VII.46})$$

La quantité κ_ν est appelée le coefficient d'extinction massique ou le coefficient d'absorption massique. Ce coefficient tient compte de deux processus physiques qui sont l'absorption vraie et la dispersion. Ainsi, nous pouvons écrire

$$\kappa_\nu = \kappa_\nu^a + \sigma_\nu \quad (\text{VII.47})$$

où κ_ν^a et σ_ν sont, respectivement, les coefficients d'absorption et de dispersion.

L'absorption est un processus par lequel l'énergie est extraite du pinceau de rayonnement en changeant les degrés de liberté des atomes et des molécules (processus expliqués par la physique atomique).

Un autre processus qui contribue à la perte de l'énergie d'un pinceau de rayonnement est la dispersion caractérisé par un coefficient de dispersion massique κ_ν^s . La dispersion ne change pas seulement la direction du pinceau de rayonnement mais aussi son énergie. Dans le cas d'une dispersion seule, il est possible de définir l'albédo par

$$\omega_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\kappa_\nu} \quad (\text{VII.48})$$

qui est le rapport des coefficients d'absorption et de dispersion.

1. 7. Coefficient d'émission

Supposons qu'une masse de volume $d\nu$ émit un pinceau de rayonnement d'énergie dE_ν dans l'angle solide $d\omega$ centré autour de la direction $\vec{\Omega}$ dans l'intervalle des fréquences $d\nu$ et $\nu + d\nu$ pendant l'intervalle temporel t et $t + dt$. Ainsi

$$dE_\nu = J_\nu d\nu d\omega d\nu dt \quad (\text{VII.49})$$

où J_ν est le coefficient d'émission macroscopique ou simplement émissivité.

Dans le cas d'un équilibre thermodynamique local, nous avons

$$J_\nu^a(ETL) = \kappa_\nu^a E_b(\nu, T) \quad (\text{VII.50})$$

où

$$E_b(\nu, T) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (\text{VII.51})$$

est la loi de Planck donnant la distribution énergétique du rayonnement thermique émis par un corps noir.

L'émission d'un pinceau de rayonnement peut provenir de la dispersion, ainsi, nous avons

$$J_\nu^s(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \iint \sigma_\nu^s(\vec{r}, t) p(\nu, \vec{\Omega}, \nu', \vec{\Omega}', \vec{r}, t) I_{\nu'}(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) d\nu' d\omega' \quad (\text{VII.52})$$

La fonction $p(\nu, \vec{\Omega}, \nu', \vec{\Omega}', \vec{r}, t)$ est la fonction de phase tel que

$$\iint p(\nu, \vec{\Omega}, \nu', \vec{\Omega}', \vec{r}, t) d\nu' d\omega' = 4\pi \quad (\text{VII.53})$$

Elle représente la fraction d'énergie rayonnante déduite du pinceau de rayonnement.

La fonction source est définie comme étant le rapport du coefficient d'émission au coefficient d'absorption, c'est-à-dire

$$S_\nu = \frac{J_\nu}{\kappa_\nu} \quad (\text{VII.54})$$

A partir des relations VII. 47 et VII. 48, nous avons

$$\kappa_\nu^a = \kappa_\nu (1 - \omega_\nu) \quad (\text{VII.55})$$

$$\sigma_\nu = \kappa_\nu \omega_\nu \quad (\text{VII.56})$$

ainsi

$$S_\nu = \frac{\kappa_\nu^a E_b(\nu, T)}{\kappa_\nu} \quad (VII.57)$$

$$+ \frac{1}{4\pi\kappa_\nu} \iint \sigma_\nu^s(\vec{r}, t) p(\nu, \vec{\Omega}, \nu', \vec{\Omega}', \vec{r}, t) I_{\nu'}(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) d\nu' d\omega'$$

en y substituant les expressions VII. 55 et VII. 56, nous obtenons

$$S_\nu = \frac{\kappa_\nu(1-\omega_\nu)E_b(\nu, T)}{\kappa_\nu}$$

$$+ \frac{\kappa_\nu\omega_\nu}{4\pi\kappa_\nu} \iint p(\nu, \vec{\Omega}, \nu', \vec{\Omega}', \vec{r}, t) I_{\nu'}(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) d\nu' d\omega'$$

soit

$$S_\nu = (1-\omega_\nu(\vec{r}, t))E_b(\nu, T)$$

$$+ \frac{\omega_\nu(\vec{r}, t)}{4\pi} \iint p(\nu, \vec{\Omega}, \nu', \vec{\Omega}', \vec{r}, t) I_{\nu'}(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) d\nu' d\omega' \quad (VII.58)$$

2. Équation de transfert radiatif

2. 1. Dédution de l'équation de transfert radiatif

L'équation de transfert radiatif est l'expression mathématique de la conservation de l'énergie rayonnante. Admettons qu'un pinceau de rayonnement d'intensité $I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ dans l'intervalle de fréquence $d\nu$, passe pendant l'intervalle de temps dt dans une région de longueur ds à travers une section de surface dA dans la direction $\vec{\Omega}$ et dans un angle solide $d\omega$. Si nous supposons que l'intensité du pinceau de rayonnement à la position $\vec{r} + d\vec{r}$ à l'instant $t + dt$ est $I_\nu(\vec{r} + d\vec{r}, \vec{\Omega}, t + dt)$, alors

$$(I_\nu(\vec{r} + d\vec{r}, \vec{\Omega}, t + dt) - I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)) dA d\nu d\omega dt =$$

$$(J_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) - \kappa_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)) ds dA d\nu d\omega dt \quad (VII.59)$$

où $J_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ et $\kappa_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ sont, respectivement, les coefficients d'émission et d'absorption.

A partir de la relation mathématique

$$I_\nu(\vec{r} + d\vec{r}, \vec{\Omega}, t + dt) - I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \frac{\partial I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)}{\partial s} ds \quad (\text{VII.60})$$

sachant que

$$c = \frac{ds}{dt} \quad (\text{VII.61})$$

il vient

$$I_\nu(\vec{r} + d\vec{r}, \vec{\Omega}, t + dt) - I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)}{\partial s} \right) ds \quad (\text{VII.62})$$

et de là, la relation VII. 59 devient

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)}{\partial s} \right) ds dA dv d\omega dt = (J_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) - \kappa_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)) ds dA dv d\omega dt \quad (\text{VII.63})$$

soit au final

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)}{\partial s} = J_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) - \kappa_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \quad (\text{VII.64})$$

En coordonnées cartésiennes, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial}{\partial z} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{VII.65})$$

où (α, β, γ) sont les cosinus directeurs du vecteur direction $\vec{\Omega}$.
Ainsi,

$$\frac{\partial I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)}{\partial s} = \alpha \frac{\partial I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)}{\partial x} + \beta \frac{\partial I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)}{\partial y} + \gamma \frac{\partial I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)}{\partial z}$$

ou bien

$$\frac{\partial I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)}{\partial s} = \vec{\Omega} \bullet \nabla I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \nabla \bullet (I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \vec{\Omega}) \quad (\text{VII.66})$$

et de là

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \bullet (I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \vec{\Omega}) = \\ J_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) - \kappa_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \end{aligned} \quad (\text{VII.67})$$

En régime permanent, cette équation se réduit à

$$\frac{\partial I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega})}{\partial s} = J_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}) - \kappa_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}) I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}) \quad (\text{VII.68})$$

2. 1. 1. Équation de transfert radiatif dans un milieu stratifié

Dans un milieu composé de couches parallèles, nous avons

$$\cos \theta = \frac{z}{s} \quad (\text{VII.69})$$

$$\frac{\partial I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega})}{\partial s} = \cos \theta \frac{\partial I_\nu(z, \theta)}{\partial z} = \mu \frac{\partial I_\nu(z, \theta)}{\partial z} \quad (\text{VII.70})$$

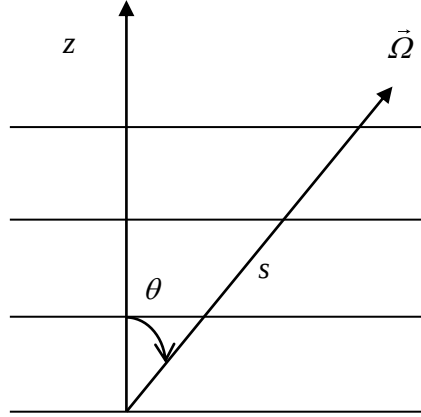


Figure VII. 5. Direction du pinceau de rayonnement dans un milieu composé de couches parallèles.

et dans ce cas, l'équation VII. 68 se réduit à

$$\mu \frac{dI_v(z, \theta)}{dz} = J_v(z, \theta) - \kappa_v(z, \theta) I_v(z, \theta) \quad (\text{VII.71})$$

2. 1. 2. Équation de transfert radiatif dans un milieu à symétrie sphérique

L'équation VII. 63, en présence d'une symétrie sphérique, s'écrit

$$\frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial I_v(r, \theta)}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial I_v(r, \theta)}{\partial \theta} = J_v(r, \theta) - \kappa_v(r, \theta) I_v(r, \theta) \quad (\text{VII.72})$$

Si nous remarquons que

$$\cos \theta = \frac{dr}{ds} \quad (\text{VII.73})$$

et

$$-\sin \theta = \frac{rd\theta}{ds} \quad (d\theta < 0) \quad (\text{VII.74})$$

l'équation VII. 72 devient

$$\cos \theta \frac{\partial I_v(r, \theta)}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial I_v(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{J_v(r, \theta) - \kappa_v(r, \theta) I_v(r, \theta)}{r} \quad (\text{VII.75})$$

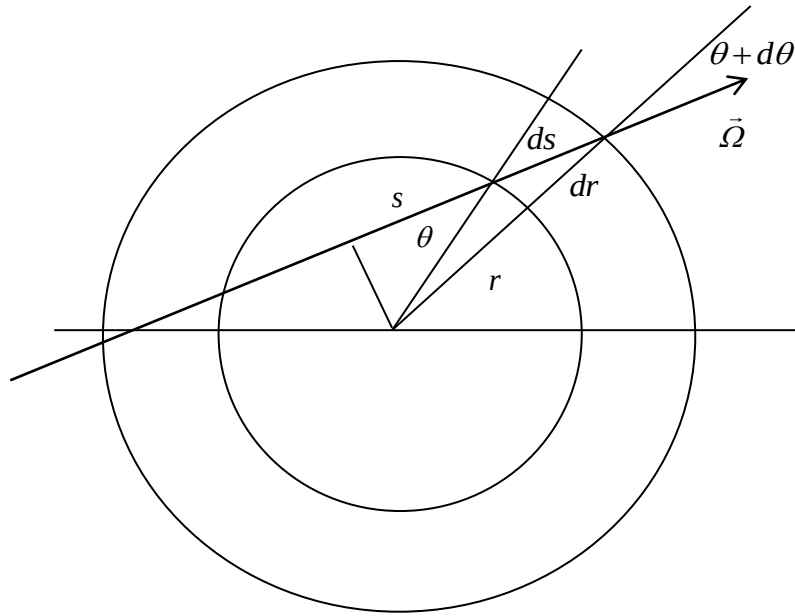


Figure VII. 6. Pinceau de rayonnement dans une symétrie sphérique.

En introduisant le terme

$$\mu = \cos \theta \quad (\text{VII.76})$$

et sachant que

$$\frac{\partial I_v}{\partial \theta} = \frac{\partial I_v}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial I_v}{\partial \mu} \quad (\text{VII.77})$$

l'équation VII. 75 s'écrit

$$\cos \theta \frac{\partial I_v(r, \theta)}{\partial r} - \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial I_v(r, \theta)}{\partial \mu} = J_v(r, \theta) - \kappa_v(r, \theta) I_v(r, \theta) \quad (\text{VII.78})$$

ou encore, sous une forme plus simple, à savoir

$$\mu \frac{\partial I_v(r, \mu)}{\partial r} - \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I_v(r, \mu)}{\partial \mu} = J_v(r, \mu) - \kappa_v(r, \mu) I_v(r, \mu) \quad (\text{VII.79})$$

2. 1. 3. Équation de transfert radiatif dans un milieu à symétrie cylindrique

Dans une symétrie cylindrique dans la direction de l'axe z où r est la distance perpendiculaire à cet axe. Le vecteur $\vec{\Omega}$ nécessite deux angles pour définir sa direction. Le premier est l'angle θ entre l'axe z et le vecteur $\vec{\Omega}$ et le second est l'angle azimutal φ , c'est l'angle entre la projection du vecteur $\vec{\Omega}$ sur le plan xy et la distance r .

Dans ce système de coordonnées, nous avons

$$\frac{\partial I_v}{\partial s} = \frac{\partial I_v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial I_v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial I_v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \quad (\text{VII.80})$$

ainsi

$$\sin \theta \cos \varphi \frac{\partial I_v}{\partial r} - \frac{\sin \theta \sin \varphi}{r} \frac{\partial I_v}{\partial \theta} + \frac{\partial I_v}{\partial \varphi} = J_v(\vec{r}, \vec{\Omega}) - \kappa_v(\vec{r}, \vec{\Omega}) I_v(\vec{r}, \vec{\Omega}) \quad (\text{VII.81})$$

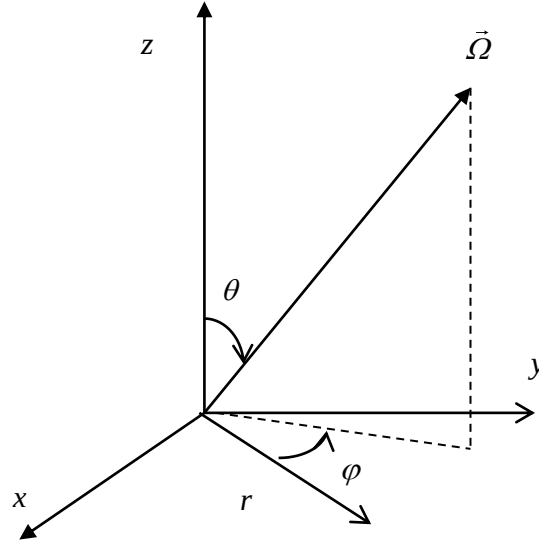


Figure VII. 7. Direction du vecteur $\vec{\Omega}$ dans le système des coordonnées cylindriques.

2. 1. 4. Équation de transfert radiatif en coordonnées sphériques

Appelons Θ l'angle entre le rayon vecteur $\vec{r}$ et l'axe z et Φ l'angle entre l'axe x et la projection du rayon vecteur $\vec{r}$ sur le plan xy . La direction du vecteur $\vec{\Omega}$ est définie par θ l'angle entre le rayon vecteur $\vec{r}$ et le vecteur $\vec{\Omega}$ et φ l'angle entre le vecteur rayon $\vec{r}$ et la projection du vecteur $\vec{r}$ sur le plan xy . Dans ce cas, l'équation VII. 68 s'écrit

$$\mu \frac{\partial I_v}{\partial r} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial I_v}{\partial \Theta} + \frac{\xi}{r \sin \Theta} \frac{\partial I_v}{\partial \Phi} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I_v}{\partial \mu} - \frac{\xi \cot \Theta}{r} \frac{\partial I_v}{\partial \varphi} = J_v - \kappa_v I_v \quad (\text{VII.82})$$

où

$$I_v = I_v(r, \Theta, \Phi, \mu, \varphi) \quad (\text{VII.83})$$

$$\mu = \cos \theta \quad (\text{VII.84})$$

$$\eta = \sin \theta \cos \varphi \quad (\text{VII.85})$$

$$\xi = \cos \theta \sin \varphi \quad (\text{VII.86})$$

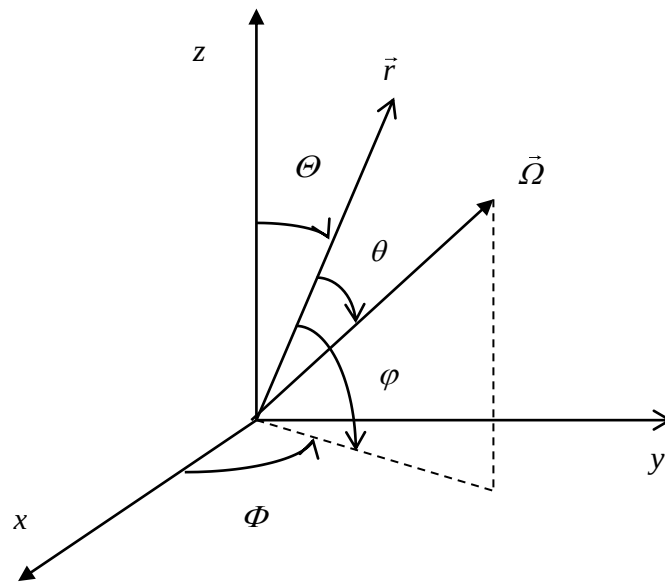


Figure VII. 8. Direction du vecteur $\vec{Q}$ dans le système des coordonnées sphériques.

2. 1. 5. Équation de transfert radiatif en coordonnées cylindriques

Si nous désignons par Θ l'angle entre le rayon vecteur $\vec{r}$ et l'axe x , dans ce cas, la direction du vecteur $\vec{Q}$ sera définie par θ l'angle entre le vecteur $\vec{Q}$ et l'axe z et φ l'angle entre le vecteur rayon $\vec{r}$ et la projection du vecteur $\vec{Q}$ sur le plan xy . Dans ce cas, nous obtenons l'équation

$$\mu \frac{\partial I_v}{\partial r} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial I_v}{\partial \Theta} + \xi \frac{\partial I_v}{\partial z} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial I_v}{\partial \mu} = J_v - \kappa_v I_v \quad (\text{VII.87})$$

où

$$I_v = I_v(r, \Theta, z, \mu, \varphi) \quad (\text{VII.88})$$

$$\xi = \cos \theta \quad (\text{VII.89})$$

$$\mu = \sin \theta \cos \varphi \quad (\text{VII.90})$$

$$\eta = \sin \theta \sin \varphi \quad (\text{VII.91})$$

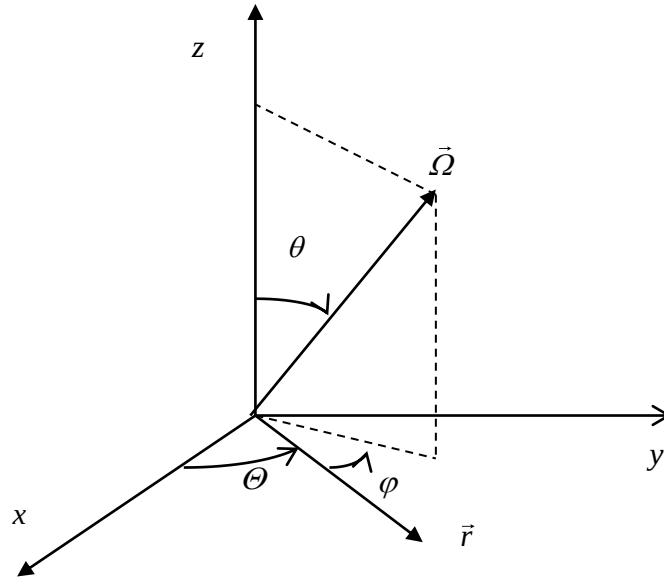


Figure VII. 9. Direction du vecteur $\vec{Q}$ dans le système des coordonnées cylindriques.

2. 2. Profondeur optique

Dans un milieu composé de couches parallèles, en régime permanent, la profondeur optique $\tau_\nu(z)$ est définie par

$$\tau_\nu(z) = - \int_{z_1}^{z_2} \kappa_\nu(z') dz' \quad (\text{VII.92})$$

La profondeur optique est une estimation de distance à laquelle nous pouvons voir à l'intérieur d'un milieu.

Dans le cas de l'atmosphère d'une étoile (masse gazeuse sphérique), nous avons

$$\tau_\nu(z) = \begin{cases} \tau_\nu^{\max}, & z \equiv r = 0 \\ 0, & z \equiv r = r_{\max} \end{cases} \quad (\text{VII.93})$$

2. 3. Fonction source

La fonction source est définie comme le rapport du coefficient d'émission au coefficient d'absorption

$$S_\nu = \frac{J_\nu}{\kappa_\nu} \quad (\text{VII.94})$$

En régime permanent et dans un milieu composé de couches parallèles, l'équation de transfert radiative

$$\mu \frac{dI_\nu(z, \theta)}{dz} = J_\nu(z, \theta) - \kappa_\nu(z, \theta) I_\nu(z, \theta) \quad (\text{VII.95})$$

peut être transformée à l'aide de relation VII. 92, en effet

$$\kappa_\nu(z) = - \frac{d\tau_\nu(z)}{dz} \quad (\text{VII.96})$$

et en écrivant

$$\frac{dI_\nu}{dz} = \frac{dI_\nu}{d\tau} \frac{d\tau}{dz} \quad (\text{VII.97})$$

d'où

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} \frac{d\tau_\nu}{dz} = -\kappa_\nu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} \quad (\text{VII.98})$$

et de là, l'équation VII. 95 s'écrit

$$-\mu\kappa_\nu \frac{dI_\nu}{d\tau} = J_\nu - \kappa_\nu I_\nu \quad (\text{VII.99})$$

soit

$$\mu \frac{dI_\nu(\tau, \mu)}{d\tau} = I_\nu(\tau, \mu) - S_\nu(\tau, \mu) \quad (\text{VII.100})$$

Le coefficient d'absorption massique κ_ν est dû à la contribution d'une absorption vraie et d'une dispersion, soit

$$\kappa_\nu = \kappa_\nu^a + \sigma_\nu \quad (\text{VII.101})$$

où κ_ν^a et σ_ν sont, respectivement, les coefficients d'absorption vraie et de dispersion.

L'émission J_ν est la somme de l'émission thermique et de la dispersion, c'est-à-dire

$$J_\nu = J_\nu^a + J_\nu^s = \kappa_\nu^a B_\nu + \sigma_\nu J_\nu \quad (\text{VII.102})$$

d'où la nouvelle expression de la fonction source

$$S_\nu = \frac{\kappa_\nu^a B_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\kappa_\nu^a + \sigma_\nu} \quad (\text{VII.103})$$

Dans le ca d'un équilibre thermodynamique local, la fonction source devient

$$S_\nu = \frac{\kappa_\nu^a B_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\kappa_\nu^a + \sigma_\nu} \quad (\text{VII.103})$$

par conséquent, l'équation VII. 100, se réduit à

$$\mu \frac{dI_\nu(\tau, \mu)}{d\tau} = I_\nu(\tau, \mu) - B_\nu(T) \quad (\text{VII.104})$$

2. 4. Conditions aux limites

Dans une atmosphère stellaire, il y a deux types de milieux, l'un fini et l'autre semi-infini. Un milieu fini a une profondeur optique finie avec des limites ouvertes sur les deux côtés. Un milieu semi-infini a une limite finie d'un côté et l'autre côté est si dense et s'étend à l'infinie.

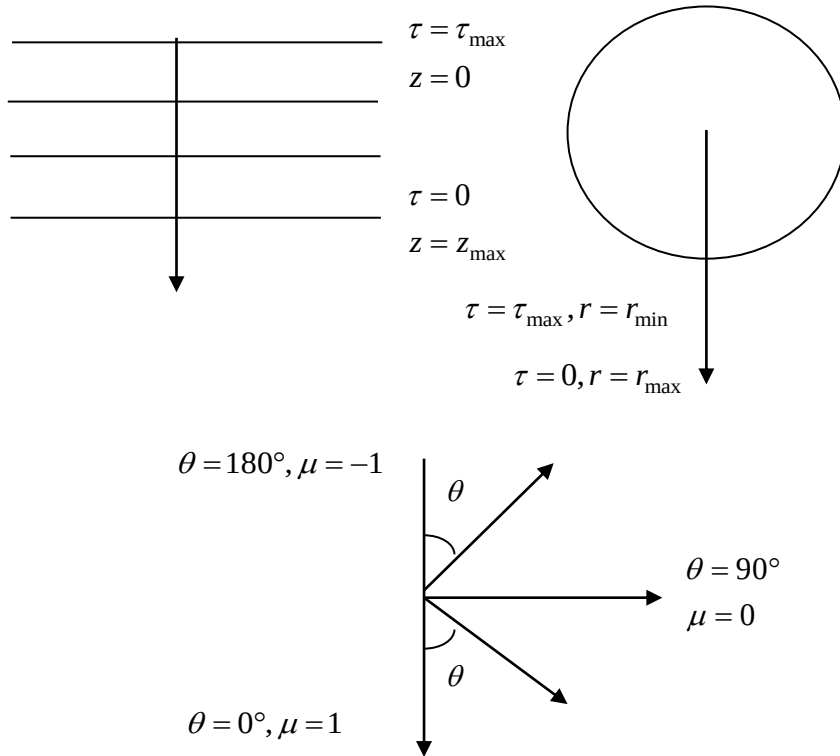


Figure VII. 10. Conditions aux limites dans les cas d'un milieu stratifié et d'une symétrie sphérique.

Dans une atmosphère stellaire, nous avons

$$I_{\nu}^{-} = I_{\nu}(\tau = 0, \mu), \quad -1 \leq \mu < 0 \quad (\text{VII.105})$$

$$I_{\nu}^{+} = I_{\nu}(\tau = \tau_{\max}, \mu), \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad (\text{VII.106})$$

Dans une atmosphère stellaire, nous admettons que $I_{\nu}^{-} = 0$ et I_{ν}^{+} a une valeur finie.

2. 5. Milieu avec seulement l'émission ou l'absorption

Si dans un milieu il y a ni absorption (et /ou dispersion) et n'émet pas de radiation (vide), nous avons

$$J_{\nu} = \kappa_{\nu} = 0 \quad (\text{VII.107})$$

l'équation VII. 95

$$\mu \frac{dI_{\nu}(z, \theta)}{dz} = J_{\nu}(z, \theta) - \kappa_{\nu}(z, \theta) I_{\nu}(z, \theta) \quad (\text{VII.108})$$

devient

$$\mu \frac{dI_{\nu}(z, \theta)}{dz} = 0 \quad (\text{VII.109})$$

Cela montre que l'intensité spécifique I_{ν} est constante en absence de source et de puits.

Si le milieu absorbe et n'émet pas, l'équation VII. 108 se résume à

$$\mu \frac{dI_{\nu}(z, \theta)}{dz} = -\kappa_{\nu}(z, \theta) I_{\nu}(z, \theta) \quad (\text{VII.110})$$

soit

$$\frac{dI_{\nu}(z, \theta)}{I_{\nu}(z, \theta)} = -\frac{\kappa_{\nu}(z, \theta)}{\mu} dz \quad (\text{VII.111})$$

équation, dont l'intégration, donne

$$I_v(z, \theta) = I_v(z_0, \theta) \exp \left(- \int_{z_0}^z \frac{\kappa_v(z, \theta)}{\mu} dz \right) \quad (\text{VII.112})$$

En tenant compte de la définition de la profondeur optique, cette relation prend la forme

$$I_v(z, \theta) = I_v(z_0, \theta) \exp \left(- \frac{\tau_v(z, \theta) - \tau_v(z_0, \theta)}{\mu} \right) \quad (\text{VII.113})$$

Ce résultat montre que l'intensité spécifique $I_v(z_0, \theta)$ est atténuée par le facteur $\exp \left(- \frac{\tau_v(z, \theta) - \tau_v(z_0, \theta)}{\mu} \right)$ quand elle traverse un milieu de la profondeur optique $(\tau_v(z, \theta) - \tau_v(z_0, \theta))$.

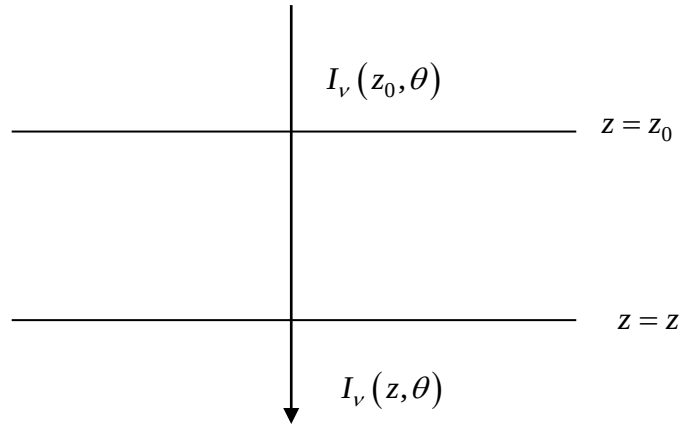


Figure VII. 11. Absorption à travers un milieu stratifié.

Si le milieu émis sans absorption, l'équation VII. 108

$$\mu \frac{dI_v(z, \theta)}{dz} = J_v(z, \theta) \quad (\text{VII.114})$$

dont la solution s'écrit

$$I_\nu(z, \theta) = \int_{z_0}^z \frac{J_\nu(z, \theta)}{\mu} dz + I_\nu(z_0, \theta) \quad (\text{VII.115})$$