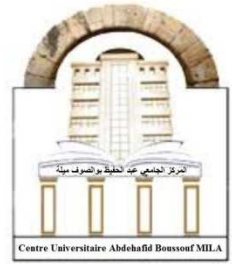




République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique
Centre Universitaire Abdel Hafid Boussouf
Mila



Support de Cours

Matière : COMBUSTION

Chapitre III : EQUATIONS DES ECOULEMENTS

REACTIFS

Filière : Génie Mécanique
Spécialité : Energétique
Master1

Enseignante :

Dr : ZEGHBID Ilhem



Année universitaire 2019-202

CHAPITRE III

EQUATIONS DES ECOULEMENTS REACTIFS

L'objectif principal de ce chapitre est de présenter les équations de gouvernance simplifiées exprimant la conservation de la masse, des espèces, de la quantité de mouvement et de l'énergie nécessaire aux écoulements réactifs. En particulier, nous souhaitons traiter les trois situations suivantes :

1. Un écoulement constant (stationnaire) pour une géométrie plane unidimensionnelle (coordonnée x).
2. Un écoulement constant (stationnaire) pour une géométrie sphérique unidimensionnelle (coordonnée r uniquement).
3. Un écoulement constant (stationnaire) pour une géométrie axisymétrique à deux dimensions (coordonnées r et x).

Ces systèmes et les coordonnées géométriques sont illustrés à la Figure1.

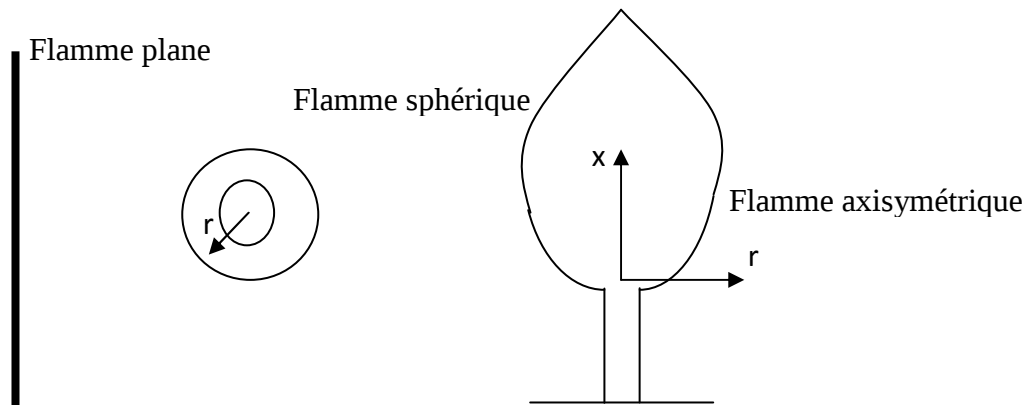


Figure1 : Système de coordonnées pour une flamme plane, flamme sphérique, et la flamme axisymétrique (jet de flammes)

III.1 Conservation de la masse (continuité)

Considérons un volume de contrôle unidimensionnel présenté dans la Fig.2, une couche plane d'épaisseur Δx . la masse entre en x et sort en $x + \Delta x$, la différence entre l'écoulement entrant et sortant étant le débit à lequel la masse s'accumule dans le volume de contrôle, c'est-à-dire :

$$\frac{dm_{vc}}{dt} = [\dot{m}]_x - [\dot{m}]_{x+\Delta x} \quad \text{III.1}$$

$\nwarrow$
 Taux
 d'augmentation
 de la masse à
 l'intérieur du vc

$\nwarrow$
 Débit massique
 entrant dans vc

$\nwarrow$
 Débit massique
 sortant du vc

Reconnaissant que la masse entrante dans le vc est $m_{vc} = \rho \cdot V_{vc}$, où le volume $V_{vc} = A \cdot \Delta x$, et le débit massique $\dot{m} = \rho \cdot v_x \cdot A$, nous réécrivons l'équation (III.1), comme :

$$\frac{d(\rho \cdot A \cdot \Delta x)}{dt} = [\rho \cdot v_x \cdot A]_x - [\rho \cdot v_x \cdot A]_{x+\Delta x} \quad \text{III.2}$$

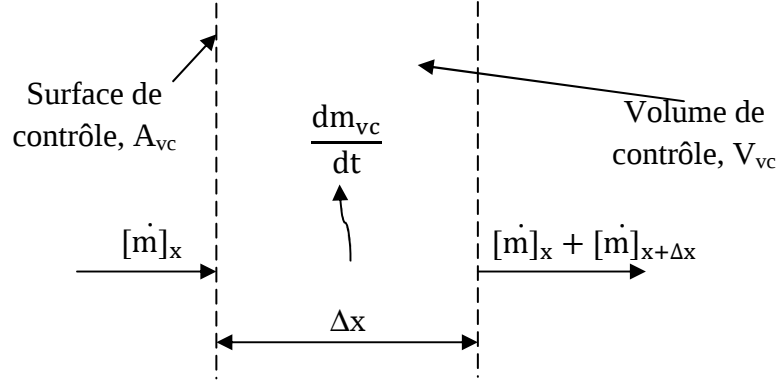


Figure2 : volume de contrôle pour l'analyse unidimensionnelle, de la conservation de masse.

En divisant par $(A \cdot \Delta x)$ et en prenant la limite comme $\Delta x \rightarrow 0$, Equation (III.2) devient :

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \quad \text{III.3}$$

En cas de l'écoulement stationnaire, où $\frac{\partial(\rho)}{\partial t} = 0$,

$$\frac{d(\rho v_x)}{dx} = 0 \quad \text{III.4.a}$$

$$\text{Où: } \rho v_x = \text{constant} \quad \text{III.4.b}$$

Dans les systèmes de combustion, la densité variera considérablement avec la position dans l'écoulement, nous voyons des équations (III.4) que la vitesse doit également varier avec la position, de sorte que le produit ρv_x , le flux peut s'écrire comme $\dot{m}$, reste constant dans sa forme générale, la conservation de masse s'écrit comme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho V) = 0 \quad \text{III.5}$$

$\nearrow$
 Taux de gains
de débit masse
par unité de
volume

 $\nwarrow$
 Taux net de
débit masse par
unité de volume

La conservation de masse dans un système sphérique :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot \rho \cdot v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\rho v_\phi)}{\partial \phi} = 0$$

Pour un système sphérique unidimensionnel ; $v_\theta = v_\phi = 0$, et $\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \phi} = 0$, être :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \cdot (r^2 \cdot \rho \cdot v_r) = 0 \quad \text{III.6.a}$$

$$r^2 \cdot \rho \cdot v_r = \text{constant} \quad \text{III.6.b}$$

L'équation (III.6.b) est équivalente à l'écriture $\dot{m} = \text{constant} = \rho \cdot v_r \cdot A(r)$, où $A(r) = 4\pi r^2$. Pour notre système axisymétrique avec un écoulement stationnaire, l'équation de continuité générale peut s'écrire comme suit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \cdot (r \cdot \rho \cdot v_r) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot v_x) = 0 \quad \text{III.7}$$

III.1.1 Conservation de masse des espèces (continuité des espèces)

L'équation unidimensionnelle de la conservation des espèces avec les hypothèses que les espèces diffusent uniquement à la suite de gradient de concentration et que le mélange ne comprenait que deux espèces (mélange binaire), et pour un écoulement stationnaire :

$$\frac{d}{dx} (\dot{m}'' \cdot Y_A) - \frac{d}{dx} \left(\rho \cdot D_{AB} \cdot \frac{dY_A}{dx} \right) = \dot{m}_A''' \quad \text{III.8}$$

$\nearrow$ Flux massique de l'espèce A par convection par unité de volume (kg/s-m ³)	$\nearrow$ Flux massique de l'espèce A par diffusion moléculaire par unité de volume (kg/s-m ³)	$\nwarrow$ Production massique nette du taux de l'espèce A par réaction chimique par unité de volume (kg/s-m ³)
---	---	--

Où : $\dot{m}''$ est le flux massique ρv_x , et $\dot{m}_A'''$ est la production nette du taux de l'espèce A par unité de volume associé à la réaction chimique.

Une forme unidimensionnelle plus générale de la continuité des espèces peut être exprimée comme,

$$\frac{d \dot{m}_i''}{dx} = \dot{m}_i''' \quad i = 1, 2, \dots, N, \dots \quad \text{III.9}$$

Où l'indice i représente i^{ème} espèce

Le flux massique de i, $\dot{m}_i''$, est défini par la vitesse moyenne de masse :

$$\dot{m}_i'' = \rho \cdot Y_i \cdot V_i \quad \text{III.10}$$

Où la vitesse de l'espèce V_i est en général, une expression assez compliquée qui prend en compte la diffusion de masse associée aux gradients de concentration (diffusion ordinaire).

La somme de tous les flux massique des espèces individuels est le flux de masse de mélange, c'est-à-dire :

$$\sum \dot{m}_i'' = \sum \rho \cdot Y_i \cdot V_i = \dot{m}'' \quad \text{III.11}$$

Ainsi, nous voyons que; $\dot{m}'' = \rho V$, la vitesse moyenne de masse V est :

$$V = \sum Y_i \cdot V_i \quad \text{III.12}$$

C'est la vitesse de fluide que l'on appelle vitesse moyenne de masse. La différence entre la vitesse des espèces et la vitesse de masse est définie comme la vitesse de diffusion, $v_{i,diff} \equiv v_i - V$, la vitesse des espèces individuelles relatives à la vitesse de masse. Le flux massique diffusionnel peut être exprimé en terme de diffusion :

$$\dot{m}_{i,diff}'' \equiv \rho \cdot Y_i \cdot (v_i - V) = \rho \cdot Y_i \cdot v_{i,diff} \quad \text{III.13}$$

Le flux total d'espèces est la somme des contributions globales des flux de masse et de la diffusion, c'est-à-dire :

$$\dot{m}_i'' = \dot{m}'' \cdot Y_i + \dot{m}_{i,diff}'' \quad \text{III.14.a}$$

Ou en terme de vitesses:

$$\rho \cdot Y_i \cdot v_i = \rho \cdot Y_i \cdot V + \rho \cdot Y_i \cdot v_{i,diff} \quad \text{III.14.b}$$

Pour le cas diffusion ordinaire seulement (pas de diffusion thermique ou sous pression) dans un mélange binaire, la forme générale de la loi de Fick ci-dessous peut être utilisée pour évaluée le flux de masse de l'espèce, $\dot{m}_i''$.

Donc la relation générale de la conservation des espèces est comme suit :

$$\dot{m}_A'' = \dot{m}'' \cdot Y_A - \rho \cdot D_{AB} \cdot \nabla Y_A \quad \text{III.15}$$

Pour le système symétrique sphérique avec un écoulement stationnaire :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \cdot (r^2 \cdot \dot{m}_i'') = \dot{m}_i''' \quad \text{III.16}$$

Ou, avec l'hypothèse de diffusion binaire, Equation (III.15) devient :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \cdot \left[r^2 \left(\rho \cdot v_r \cdot Y_A - \rho \cdot D_{AB} \frac{dY_A}{dr} \right) \right] = \dot{m}_A''' \quad \text{III.17}$$

Pour une géométrie axisymétrique (r, et coordonné x), l'équation de conservation des espèces pour un mélange binaire est :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \cdot (r \cdot \rho \cdot v_r \cdot Y_A) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (r \cdot \rho \cdot v_x \cdot Y_A) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \cdot (r \cdot \rho \cdot D_{AB} \cdot \frac{\partial Y_A}{\partial r}) = \dot{m}_A''' \quad \text{III.18}$$

Flux massique de
l'espèce A due à
la convection
radiale par unité
de volume (kg/s-
m³)

Flux massique de
l'espèce A due à
la convection
axiale par unité de
volume (kg/s-m³)

Flux massique de
l'espèce A due à
la diffusion
moléculaire par
unité de volume
(kg/s-m³)

Taux de
production nette
de l'espèce A par
une réaction
chimique par
unité de volume
(kg/s-m³)

III.1.2 La diffusion des multi composants

Pour modéliser et comprendre les détails de nombreux systèmes de combustion, en particulier la structure des flammes laminaires pré mélangées et non pré mélangées, le problème ne peut être réduit à une simple représentation impliquant un mélange binaire. Dans ce cas la formulation des lois sur le transport des espèces doit tenir compte du fait qu'il existe un grand nombre d'espèces présentes et que les propriétés de chaque espèce peuvent être très différentes.

Par exemple, on pourrait s'attendre à ce que les molécules de carburant lourdes se diffusent beaucoup moins rapidement que les atomes d'H légers. De plus, les forts gradients de température, généralement présents dans les flammes, produisent une deuxième force motrice pour le transport de masse en plus de celle produite par les gradients de concentrations. Cette diffusion de masse par le gradient de température, appelé diffusion thermique ou effet Soret, a pour conséquent des molécules légères diffusant des régions à basse température vers les régions à haute température, et inversement, des molécules lourdes.

Cela nous permet d'étudier la diffusion multi composant. En exprimant les flux de diffusion en masse et/ou les vitesses de diffusion d'espèces individuelles.

Les expressions les plus générales de la diffusion ordinaire sont :

$$\dot{m}''_{i,diff,x} = \frac{P}{R_u T} \frac{M m_i}{M m_{mélange}} \cdot \sum_{j=1}^N M m_j \cdot D_{ij} \cdot \nabla x_j \quad i = 1, 2, \dots, N \quad \text{I} \quad \text{III.19}$$

Où :

$M m_{mélange}$ est la masse moléculaire du mélange et D_{ij} sont les coefficients de diffusion de multi composants ordinaires. Il est important de noter que la diffusivité multi composante D_{ij} , n'est pas identique à la diffusivité binaire D_{ij} .

La vitesse de diffusion de l'espèce i est donné par :

$$v_{i,diff,x} = \frac{1}{x_i \cdot M m_{mélange}} \cdot \sum_{j=1}^N M m_j \cdot D_{ij} \cdot \nabla x_j \quad i = 1, 2, \dots, N \quad \text{III.20}$$

La vitesse de diffusion pour la N ième espèce s'écrit comme suit :

$$\sum_{i=1}^N \rho \cdot Y_i \cdot v_{i,diff,x} = 0 \quad \text{III.21}$$

Où:

$$V_{N,diff,x} = - \frac{1}{Y_N} \cdot \sum_{i=1}^{N-1} Y_i \cdot v_{i,diff,x} \quad \text{III.22}$$

Les coefficients de diffusion binaire, on peut employer :

$$D_{im} = \frac{1 - \chi_i}{\sum_{j \neq i}^N \left(\frac{\chi_j}{D_{ij}} \right)} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad \text{III.23}$$

Une simplification particulièrement utile est obtenue lorsque toutes les espèces sauf une, la N ème, sont à l'état de traces. Pour ce cas,

$$D_{im} = D_{iN} \quad \text{III.24}$$

Nous voyons ici qu'il suffit de calculer les coefficients de diffusion binaire de la $N-1$ pour déterminer toutes les vitesses de diffusion des espèces.

III.2 Conservation de la quantité de mouvement

III.2.1 Formes unidimensionnelles

La conservation de quantité de mouvement unidimensionnelle dans les systèmes plans et sphériques est extrêmement simple par ce que nous négligeons à la fois les forces visqueuses et la force gravitationnelle du corps.

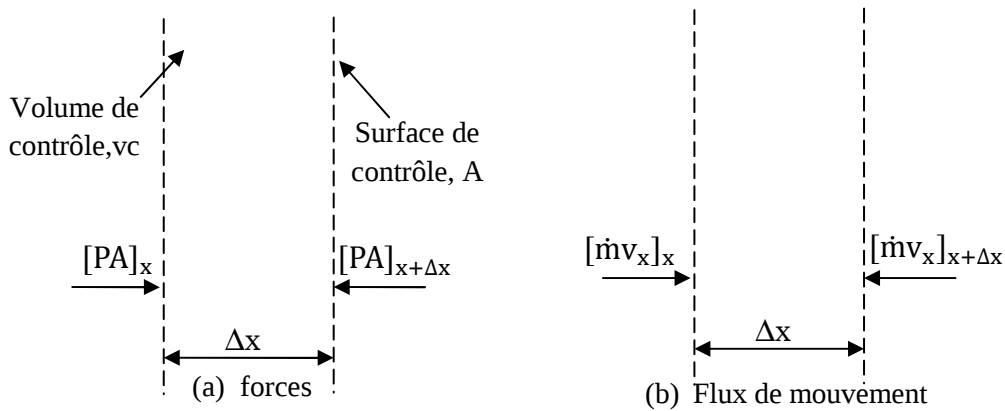


Figure3 : volume de contrôle pour l'analyse unidimensionnelle de la conservation de la quantité de mouvement, en négligeons tous les effets de la viscosité.

La Figure 3 montre que les seules forces agissant sur notre volume de contrôle plan sont celles dues à la pression. En outre, il n'y a qu'un seul flux entrant et un seul flux sortant du volume de contrôle.

Donc la conservation de la quantité de mouvement est la somme de toutes les forces agissantes dans une direction donnée sur un volume de contrôle est égal aux flux de quantité de mouvement net sortant du volume dans la même direction, c'est-à-dire :

$$\sum F = \dot{m} V_{out} - \dot{m} V_{in} \quad \text{III.25}$$

Pour un système 1-D, l'équation (III.25) est écrite :

$$[PA]_x - [PA]_{x+\Delta x} = \dot{m} ([v_x]_{x+\Delta x} - [v_x]_x) \quad \text{III.26}$$

Divisez les deux côtés de l'équation (III.26) par Δx , nous obtenons la forme différentielle suivante :

$$-\frac{dP}{dx} = \dot{m}'' \cdot \frac{dv_x}{dx} \quad \text{III.27.a}$$

Exprimons le flux massique par des termes de vitesse ($\dot{m}'' = \rho \cdot v_x$). L'équation (III.27.a) devient :

$$-\frac{dP}{dx} = \rho \cdot v_x \cdot \frac{dv_x}{dx} \quad \text{III.27.b}$$

III.3 Conservation de l'énergie

III.3.1 Forme générale unidimensionnelle

La Figure 4 présente les différentes énergies entrantes et sortantes d'une couche plane, de longueur Δx , la 1ère loi de la thermodynamique peut être exprimée comme suit :

$$(\dot{Q}_x'' - \dot{Q}_{x+\Delta x}'')A - \dot{W}_{vc} = \dot{m}'' \cdot A \left[\left(h + \frac{v_x^2}{2} + gz \right)_{x+\Delta x} - \left(h + \frac{v_x^2}{2} + gz \right)_x \right] \quad \text{III.28}$$

Dès le départ, nous assumons l'état est stable, ainsi, aucune accumulation d'énergie dans le volume de contrôle n'est indiquée, nous supposons également qu'aucun travail n'est effectué avec le volume de contrôle, et qu'il n'y a aucun changement dans les énergies potentielles des flux d'entrée et de sortie. Avec ces hypothèses l'équation (III.28) devient :

$$-\frac{d\dot{Q}_x''}{dx} = \dot{m}'' \cdot \left(\frac{dh}{dx} + v_x \frac{dv_x}{dx} \right) \quad \text{III.29}$$

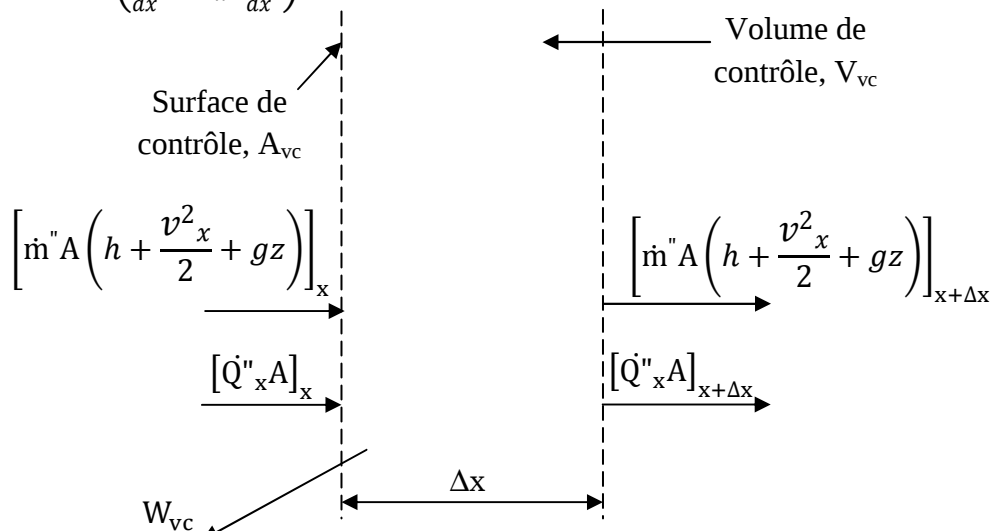


Figure4 : volume de contrôle pour l'analyse unidimensionnelle en régime permanent de la conservation d'énergie.

L'équation de conservation d'énergie unidimensionnelle est comme suit :

$$\sum \dot{m}_i'' \frac{dh_i}{dx} + \frac{d}{dx} \left(-k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{m}'' \cdot v_x \cdot \frac{dv_x}{dx} = - \sum h_i \dot{m}_i''' \quad \text{III.30}$$

Cette équation s'applique aux systèmes à plusieurs composants (non binaires) et aux systèmes binaires.