

Les Surfaces de Bézier :

L'approche la plus utilisée pour définir une surface de Bézier et celle du produit tensoriel. Selon cette approche on peut définir une surface comme l'ensemble des points d'une courbe se déplaçant et se transformant simultanément (selon Bézier).

Si on considère deux courbes dans l'espace définies come suit:

$$F(u) = \sum_i N_i(u) \mathbf{b}_i \quad \text{et} \quad G(u) = \sum_i M_i(u) \mathbf{d}_i$$

Leurs produit tensoriel est défini come suit :

$$S(u, v) := \sum_i \sum_j N_i(u) M_j(v) \mathbf{c}_{i,j}$$

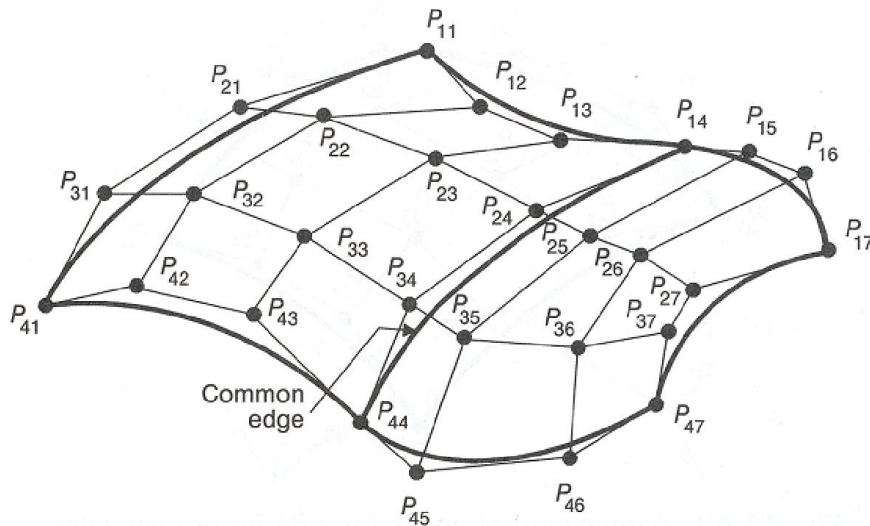
Pour le cas d'une surface de Bézier :

$$S(u, v) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) \mathbf{b}_{i,j}$$

Si on reprend cette définition on peut remarquer que :

$$S(u, v) = \sum_i \sum_j N_i(u) M_j(v) \mathbf{c}_{i,j} = \sum_i N_i(u) \left(\sum_j M_j(v) \mathbf{c}_{i,j} \right) = \sum_j M_j(v) \left(\sum_i N_i(u) \mathbf{c}_{i,j} \right)$$

Pour une valeur fixe de u on obtient une courbe dans la direction v et vis versa. Se qui veut dire que la surface obtenue par produit tensoriel est une courbe de courbes.



Evaluation d'une surface de Bézier :

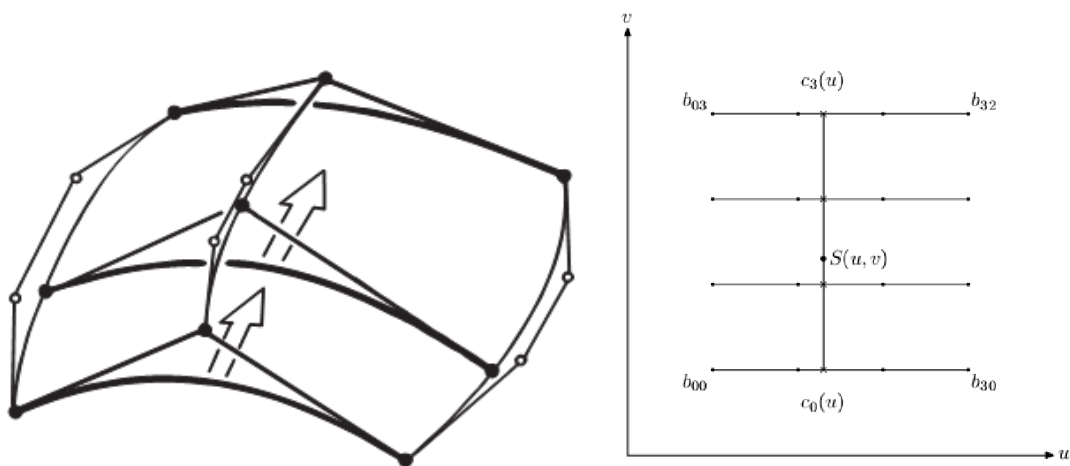
1) Avec l'approche produit tensoriel :

La procédure consiste à :

- Appliquer l'algorithme de de Casteljau pour une courbe dans une direction $(n+1)$ fois.
- Appliquer l'algorithme de de Casteljau pour une courbe dans l'autre direction une seule fois.

Pour un meilleur ordre d'évaluation (pour un minimum d'opération arithmétique) :

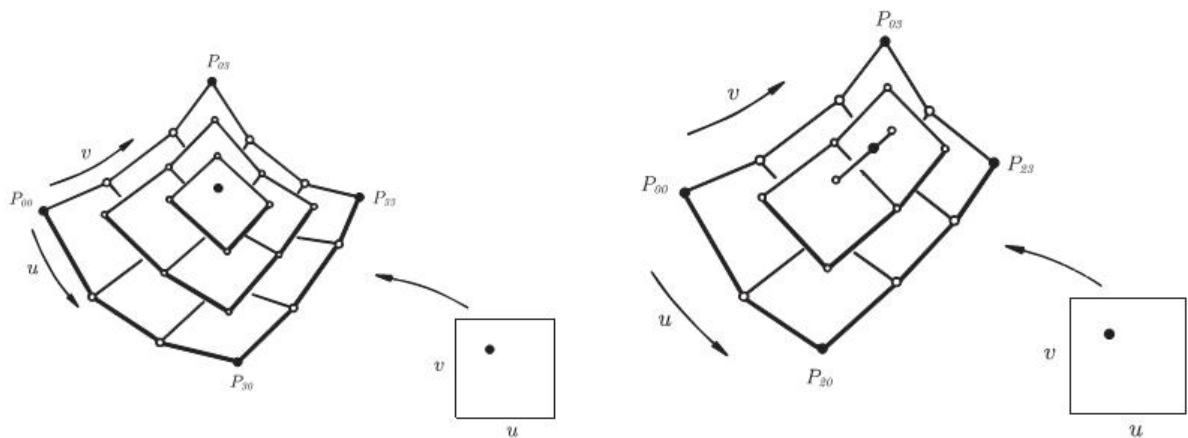
- Si $m > n$ commencer par u puis v (voire figure)
- Si $n > m$ commencer par v puis u



1) Avec l'approche directe de de Casteljau :

C'est une adaptation de l'algorithme de de Casteljau présenté pour les courbes de Bézier pour la construction de surfaces de Bézier. Si on considère un ensemble de points de contrôle constitué de $n \times p$ points, alors le point de la surface de Bézier associé aux paramètres (u, v) se construit de la façon suivante. Pour tous les carreaux de la surface, on calcule l'interpolation bilinéaire correspondant au point (u, v) ; ceci permet d'obtenir un ensemble de nouveaux points qui définissent à leurs tours un ensemble de carreaux (à la première étape : $n-1 \times p-1$).

On recommence alors itérativement le processus jusqu'à ne plus obtenir qu'un seul point.



Continuité de surfaces composées

On suppose pour simplifier que les surfaces ont le même nombre de points de contrôle (soit $n \times p$) et que l'ajustement des surfaces se fait sur un côté ayant le même nombre de points de contrôle.

Pour la continuité C^0 , les courbes de Bézier sur le bord en commun doivent coïncider :

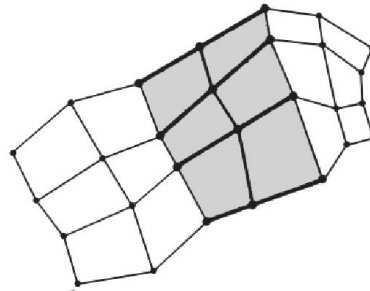
$$B(0, v) = B'(1, v) \text{ pour tout } v \in [0, 1]$$

Comme ces deux courbes de Bézier ont le même nombre de points de contrôle, elles coïncident quand ceux-ci sont confondus. La continuité C^0 implique donc que la courbe de Bézier B_i sur la surface B est prolongée par la courbe de Bézier B_i sur la surface B' (pour tout i). Pour les points de contrôle, ceci implique l'égalité

$$P_{0j} = P'_{nj} :$$

Où P_{ij} et P'_{ij} sont les points de contrôle des surfaces B et B'

Pour les continuités d'ordre supérieur, il suffit donc de considérer le degré de continuité $B_i \cup B'_i$ des courbes pour tout i .



Continuité C^1 entre deux surfaces de Bézier.

Surface B-spline :

Une surface B-spline de degré (d_1, d_2) est la surface paramétrée définie par le produit tensoriel suivant :

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} N_i^{d_1}(u) N_j^{d_2}(v) P_{ij}$$

où $P_{ij} \in \mathbb{R}^d$, $(d = 2 \text{ ou } d = 3)$.

Pour construire une surface B-spline de degrés (d_1, d_2) à partir des (n_1+1) et (n_2+1) points de contrôle P_{ij} il ce donner $(m_1+1)+(m_2+1)$ nœuds où $m_1=n_1+d_1+1$ et $m_2=n_2+d_2+1$, permettant de définir les fonctions de bases.

On remarque que $P(u,v)$ peut s'écrire sous la forme :

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^{n_1} N_i^{d_1}(u) \left(\sum_{j=0}^{n_2} N_j^{d_2}(v) P_{ij} \right) = \sum_{i=0}^{n_1} N_i^{d_1}(u) \tilde{P}_i(v)$$

Toutes les propriétés sur les courbes B-splines s'appliquent aux surfaces B-spline en chaque direction.

Algorithm 4 Évaluation d'une surface en un point (u,v)

Entrée: $d_1, d_2, (u,v), U = [u_0, \dots, u_{m_1}], V = [v_0, \dots, v_{m_2}], P = \begin{bmatrix} P_{00} & \dots & P_{0n_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n_1 0} & \dots & P_{n_1 n_2} \end{bmatrix}$

Sortie: $P(u,v)$

Algorithme:

Évaluer les $n_2 + 1$ points $\tilde{P}_i(v) =$

$\sum_{j=0}^{n_2} N_j^{d_2}(v) P_{ij}$ à l'aide de l'algorithme de De Boor;

Évaluer $P(u,v) = \sum_{i=0}^{n_1} N_i^{d_1}(u) \tilde{P}_i(v)$ à l'aide de l'algorithme de De Boor;

Les surfaces NURBS :

Comme pour les surfaces de Bézier ou les surfaces B-spline les surfaces NURBS peuvent être obtenues à travers le produit tensoriel de deux courbes NURBS pour cela on utilise de paramètres u et v avec deux indice i et j .

$$C(t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^l R_{i,j}(u, v) P_{i,j}$$

Avec

$$R_{i,j}(u, v) = \frac{N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) w_{i,j}}{\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m N_{p,k}(u) N_{q,l}(v) w_{p,q}}$$

Comme fonctions de base rationnelles.