Solution Série 3

Exercice 1

- Resoudre le problème par la méthode de séparation des variables

$$\begin{cases} U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0, & x \in [0,\pi],\ t \geq 0 \quad a \neq 0 \\ U_x(0,t) = U_x(\pi,t) = 0 \\ U(x,0) = A\cos 2x \\ U_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

On pose : $U(x,t) = X(x)T(t)$

$\Rightarrow X(x)T''(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \lambda \ (cte) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) - a^2\lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

D'autre part : $\begin{cases} U_x(0,t) = 0 \\ U_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} X'(0)T(t) = 0 \\ X'(\pi)T(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

On trouve donc le problème :

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0,\ X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

C'est un problème de Sturm Liouville

(i.e il existe les valeurs propres et les fonctions propres X)

1) Si $\lambda = 0$:

on a $X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = \alpha x + \beta$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

avec $\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0$

Donc la solution est constante :

$X(x) = \beta \in \mathbb{R}$.

mais on a $U(x,0) = A\cos 2x \neq cte$.

Donc contradiction avec les donnés

pour $\lambda = 0$, la solution est refusé.

2) Si $\lambda > 0$: on pose $\lambda = k^2$ ($k \neq 0$)

alors l'éq est : $X''(x) - k^2 X(x) = 0$

la solution est sous la forme $e^{rx} \Rightarrow$

l'éq caractéristique est :

$r^2 - k^2 = 0$

$\Rightarrow r = \pm k$

$$\Rightarrow \boxed{X(x) = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

D'autre part:

$$\begin{cases} X'(0)=0 \\ X'(\pi)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 \\ c_1(e^{k\pi} - e^{-k\pi}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1 = 0 = c_2$$

donc $X(x) = 0$ (elle est refusé)
(car les fonctions propres non nulles)

3) Si $\lambda < 0$ on pose: $\lambda = -k^2$

On obtient:

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + k^2 = 0$$

$$\Rightarrow r = \pm i k.$$

Donc la solution est

$$X(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

avec: $\begin{cases} X'(0)=0 \\ X'(\pi)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ \sin k\pi = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow k\pi = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow k = n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Donc les fonction propre sont:

$$\boxed{X_n(x) = C_n \cos nx}$$

De plus

$$T''(t) + a^2 k^2 T(t) = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + a^2 k^2 = 0$$

$$r = \pm i a k$$

Donc la solution est:

$$T(t) = \alpha_1 \cos akt + \alpha_2 \sin akt$$

avec $u_t(x,0) = 0 \Rightarrow X(x) T'(0) = 0$

$$\Rightarrow T'(0) = 0$$

donc $\alpha_2 = 0$, et $k = n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Donc $\boxed{T_n(t) = \alpha_n \cos ant}$

finalement:

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} X_n(x) T_n(t)$$

$$= \sum_{n\geq 1} \underbrace{c_n \alpha'_n}_{a_n} \cos nx \cos ant$$

$$= \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx) \cos(ant)$$

et on a $u(x,0) = A \cos 2x$

$$\Rightarrow a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots = A \cos 2x$$

$$\Rightarrow a_2 = A, \text{ et } a_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}^* - \{2\}.$$

Donc la solution est:

$$\boxed{u(x,t) = A \cos 2x \cos 2at}$$

Exercice 02

Le problème :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in [0,\ell], t \geq 0 \\ u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

On pose : $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \ (\text{cte}) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

On a aussi :

$$\begin{cases} u_x(0,t) = 0 \\ u_x(\ell,t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(\ell) = 0 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0, \ X'(\ell) = 0 \end{cases}$$

c'est un problème de $\boxed{\text{Sturme Liouvill}}$

1) Si $\lambda = 0$

$X(x) = ax + b$

$$\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0$$

$\Rightarrow X(x) = b$ (cte)

avec $u(x,0) = f(x)$, on a contradiction

2) Si $\lambda > 0$: $\lambda = k^2$

$X''(x) - k^2 X(x) = 0$

$\Rightarrow X(x) = c_1 e^{-kx} + c_2 e^{kx}$

$$\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) = 0 \text{ (refusé)}$$

Si $\lambda < 0$: $\lambda = -k^2$

$X''(x) + k^2 X(x) = 0$

$\Rightarrow X(x) = c_1 \cos kx + c_2 k \sin kx$

$$\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} c_2 = 0 \\ k = \frac{n\pi}{\ell}, \ n \in \mathbb{N}^* \end{array}$$

Donc $\boxed{X_n(x) = c_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x}$ $n \in \mathbb{N}^*$

D'autre part :

$T'(t) + k^2 T(t) = 0$

$\Rightarrow T(t) = \alpha e^{-k^2 t}$

Donc $T_n(t) = \alpha_n e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Donc $u(x,t) = \sum_{n \geq 1} X_n(x) T_n(t)$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n \geq 1} \underbrace{c_n \alpha_n}_{a_n} \cos \frac{n\pi}{\ell} x \, e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$$

$$= \sum a_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x \, e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$$

avec $u(x,0) = f(x)$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} a_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x = f(x)$$

donc les a_n sont les coeff de Fourier de la fonction (paire) f

Donc la solution est :

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n \geq 1} a_n \cos \frac{n\pi}{\ell} x \, e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}}$$