المقطع الخامس:حل مسألة النقل

مسألة النقل

هو عبارة عن حالة خاصة من مشاكل البرمجة الخطية التي تناولناها سابقا ، هذا توجب ايجاد لإجراءات خاصة لعلاجها ، حيث حل هذا المشكل تمثل في ايجاد الأسلوب أو الطريقة التي يتم بها نقل مجموعة من الوحدات المتجانسة من مجموعة مصادر مثلا (مصانع) من مجموعة مراكز توزيع مخازن مثلا ، وذلك بما يجعل تكاليف هذا النقل أثر ما يمكن .

اولا : عرض المسألة :

نفترض أن هناك مؤسسة اقتصادية هما ثلاث وحدات انتاجية متواجدة في أماكن مختلفة وهذه الوحدات هي (X_1,X_2,X_3.) على التوالي كل وحدة تنتج امكانيات العرض التالية :

x_1تعرض الكمية : a_1, x_2 تعرض الكمية : a_2 , x_3 تعرض الكمية a_3 تكلف هذه المؤسسة من خلال وحداتها الثلاث بتموين 3 مناطق مختلفة هي على التوالي :

(y_1 , y_2 ,y_3) ، حيث أن كميات الطلب بكل منطقة هي على الشكل التالي .

b_1، : الكميات التي تطلبها هيY_1 / y_2 b_2 / y_3 b_3

تكلفة نقل الوحدة الوحدات من الوحدة الانتاج الى المنطقة المراد تموينها وهي معروضة في الجدول التالي :

	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}
X_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}
X_3	C_{31}	C_{32}	C_{33}

ومنه فالمطلوب هو تموين المناطق بكل احتياجاتها من خلال الوحدات على أن تتحمل المؤسسة أقل تكلفة ممكنة في حدود طاقات العرض .

فاذا كانت الكميات التي يمكن أن تمون بها الوحدة المنطقة هي فان الكميات المحتمل توجههما من كل وحدة الى منطقة هي حسب الجدول التالي :

	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
X_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}
X_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}

ومثل : فان الجدول الشامل لمشكل النقل الذي يظم الوحدات والتكاليف يكون على النحو التالي :

الى من	Y_1	Y_2	Y_3	العرض
X_1	X_{11} C_{11}	$^{2}X_{12}$ C_{12}	X_{13} C_{13}	A_1
X_2	X_{21} C_{21}	X_{22} C_{22}	X_{23} C_{23}	A_1
X_3	X_{31} C_{31}	X_{32} C_{32}	$^{2}X_{33}$ C_{33}	A_1
الطلب	B_1	B_2	B_3	المجموع

ومنه الصيغة العامة لمشكل النقل في صورة مبرمجة خطية هي :

$$MINz = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} . x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$C_{ij} \geq 0$$

أولا : خطوات خل مشكل النقل :

حل مشاكل النقل نتبع الخطوات التالية :

1 _ بناء النموذج وايجاد حل مبدئي ممكن وهناك عدة طرق الاجاد هذا الحل المبدئي:

أ _ طريقة زاوية أقصي الشمال الغربي .

ب _ طريقة أسهل التكاليف .

ج _ الطريقة التقريبية لمشكل لفوجل .

وحتى يكون الحل ممكنا لابد أن يحقق الشروط التالية :

_ يجب توزيع كل الوحدات الموجودة في أي مصنع .

_ يجب أن لا يتبقى أي فراغ غير مستغل في أي مخزن .

_ يجب أن يساوي عدد المربعات المستخدمة عدد الأعمدة مضافا اليها عدد الأسطر مطروحا منها واحد (m+n -1) .

2- البحث فيها اذا كان هذا هو الحل الأمثل ، وتم هذه المرحلة بإحدى الطريقتين :

أ - طريقة التخطي .

ب _ طريقة التوزيع المعدل .

مثال :

شركة لإنتاج الثلاجات تمتلك ثلاثة مصانع (x_1،x_2،x_3) وتقوم بشحن هذه الثلاجات الى ثلاث (مناطق مختلفة) مخازن (y_1،y_2،y_3) متواجدة بثلاثة مناطق مختلفة أيهما . ولنفترض ان تكلفة الثلاجة الواحدة المنقولة من كل وحدة انتاج الى كل مخزن بالدينار كما يلي :

الى من	y_1	y_2	y_2
x_1	1	4	5
x_2	5	7	3
x_3	10	8	9

علما أن الطاقة الانتاجية (العرض) لهذه الشركة سنويا هي كما يلي على التوالي :

10.55^2 ثلاجة سنويا .

10.45^2 تلاجة سنويا .

10.20^2 ثلاجة سنويا وهذا لكل وحدة انتاج على التوالي بينما الطاقة الاستيعابية للمخازن فهي على التوالي :

10.40^2

10.30^2

10.50^2

وتبحث المؤسسة عن منطقة للتموين مختلف النواحي لمنتوجاتها بأقل تكلفة ممكنة .

الحل :

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij}.x_{ij} MINz$$

$$=55+45+20=120 \sum_{i=1}^{3} a_i$$

$$= 50+40+30=120 \sum_{i=1}^{3} b_j$$

ومنه فان العرض مساوى للطلب ، كما أن كميات العرض والطلب والتكاليف غير سالبة ومنه يمكن القول أن المسألة تختلف فيها الشروط المطلوبة الفرع مسائل النقل.

تشكل جدول المسألة :

الى من	y_1	y_2	y_3	العرض [2]10
x_1	x_{11} 1	x_{12} 4	x_{13} 5	55
x_2	x_{21} 5	x_{22} 7	x_{23} 3	45
x_3	x_{31} 10	x_{32} 8	x_{33} 9	20
الطلب [2]10	40	30	50	120 120

يمكن حل هذا البرنامج بثلاث طرق مبدئيا.

الطريقة الاولى : طريقة زاوية اقصى الشمال الغربي . نقوم في هذه الطريقة بإشباع أول خلية في الجدول والتي تقع في أقصى الشمالي الغربي للجدول وهي العلوية اليسرى وذلك يعد النظر الى حجم العرض والطلب وهكذا لا ننتقل من هذه الزاوية الا بعد ما نشبع العود والسطر الذي تنتمي اليه وهكذا مع بقية الخلايا .

وهكذا نكون قد سوينا كل المنتجات الوحدات ولبينا طلبات كل المخازن

إلى من	y_1	y_2	y_3	a_i
x_1	40 1	15 4	x_{13} 5	55
x_2	5	15 7	30 3	45
x_3	10	8	20 9	20
b_j	40	30	50	120 120

ومنه في هذا الجدول والذي هو جدول الحل الأساسي نجد :

$X_{11}=40$ / $X_{12} = 15$ / $X_{22}=15$ / $X_{23}=30$ / $X_{33}=20$

وبقية المتغيرات تكون مساوية للصفر ، علما أن عدد المتغيرات التي تكون داخل الأساس أو المتغيرات الحل الأولى تكون مساوية m+n-1 . 3+3-1 وهو كذلك عدد المتغيرات داخل الأساس 5 وهي مساوية .

اما التكلفة التي تتحملها المؤسسة فهي .

$$z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}\, x_{ij} \;=\; 40.1 + 15.4 + 15.7 + 20.3 + 20.9 = 475$$

الطريقة الثانية : طريقة أدنى في التكاليف

وتختلف هذه الطريقة عن الأولى في أننا نقوم باشباع الخلاء انطلاقا من أدنى تكلفة في الجدول ثم التكلفة المساوية أو الموالية وهكذا .

والحل وفق هذا الجدول هو :

$X_{11}=40$ / $X_{12}=115$ / $X_{23} = 45$ / $X_{32}=15$ / $X_{33} =5$

من \ إلى	y_1	y_2	y_3	a_i
x_1	40 (1)	15 (4)	(5)	55
x_2	(5)	(7)	45 (3)	45
x_3	(10)	15 (8)	5 (9)	20
b_j	40	30	50	120 / 120

من عيوب الطريقة الأولى أنها تهتم بموقع الخلية وليس بالتكلفة المتضمنة في الخلية.

3_ طريقة فوجل التقريبية: وتسمى أيضا طريقة الجزاء .

أ _ انشاء جدول النقل الأولي .

ب _ نوجد الفرق بين أدنى تكلفة والتكلفة الموالية لها من حيث الصفر وهذا السطرية وعموديا وتمسى هذه الفروقات بأرقام نوقل .

ج _ نبحث عن أكبر رقم من أرقام فوجل المحسوبة في الخطوة الأولى على مستوى الأسطر والأعمدة ثم نبحث عن أقل تكلفة مقابلة به في السطر أو العمود الذي ينتمى الية هذا الرقم ، ثم ندخل الخلية التي تنتمى اليها أقل تكلفة الى الحل ، ليتشبع السطر أو العمود حسب المعطيات .

د _ نعود من جديد الى الخطوة الأولى مع تفادى اعادة ايجاد الفروقات بالنسبة للأسطر أو الأعمدة المتشبعة وهذا حتى بكمية كل الطلب وتعريف كل المعروض ، حتى نحل الى جدول الحل الأساسي .

ملاحظة : في حال وجود قيمتين عظيمتين من أرقام فوجل فأننا نختار القيمة التي تقابلها أقل تكلفة .

الى من	Y_1	Y_1	Y_1	a_i	فرق 1	فرق 2	فرق 3	فرق 4
X_1	40 1	15 4	5	55	3	1	1	
X_1	5	7	45 3	45	2	4		
X_1	10	15 8	5 9	20	1	1	1	1
b_j	40	30	50	120				
فرق 1	4	3	2					
فرق 2		3	2					
فرق 3		4	4					

في الفروقات الثالثة ، نجد أكبر رقم من أرقام فوجل هو 4 على مستوى العمودين الثاني والثالث غير أننا نختار العمود الثاني لأنه يظم أقل تكلفة وهي 4 .

يبقى فرق وحيد على مستوى السطر الثالث ومقداره واحد وأقل تكلفة تقابله هي 8 لذلك يوجد للخلية (3،2) ، ومنه يبقى في الأخير أن نشبع السطر الأخير بفارق 5 وبداية وهكذا يظهر جدول الحل الأساسي مكتملا .

المرحلة الثانية : ايجاد الحل الأمثل . لايجاد الحل الأمثل يوجد طريقتين .

أ _ طريقة التخطى .

ب _ طريقة التوزيع المعدل .

ولكن قبل ذلك لا بد من التأكيد من امكانية ويود حل أمثل وذلك باختيار الخلايا الفارغة والتي من شأنها أن تدني التكلفة الكلية في حال ادخالها الى الحل الاساسي .

أ_ طريقة التخطي :

نقوم بتطبيق هذه الطريقة على جدول الحل الأساسي المتحصل عليه من طريقة أقصى الشمال الغربي :
الخلية (1،3) غير داخلة في الحل اذا أمرنا وحدة واحدة غيرها فأن ذلك يؤدي الى اختلال شروط توازن المسألة ولهذا ينبغي اضافة وحدة هذه الخانة وتعديل الاختلال في الأسطر والأعمدة .

إلى / من	y_1	y_2	y_3	a_i
x_1	40 [1]	15 1- [4]	1+ [5]	55
x_2	[5]	1+ [7]	1- 45 [3]	45
x_3	[10]	15 [8]	5 [9]	20
b_j	40	30	50	120 / 120

نرمز لتكلفة الوحدة المضافة ب j به وهكذا يكون التالي :

σ_{13}=+1.5-1.3+1.7-1.4=5

ويعني هذا أن هذه الخلية لو تدخل الى الحل فان ذلك يؤدي الى زيادة التكاليف ب 5 دنانير لكل وحدة ، وهكذا نكمل مع بقية الخانات الفارغة الى أن فصل الى الخانة التي تؤدي الى تدنية التكاليف .

σ_{21}=1 /σ_{32}=-5

σ_{31}= 10(1)+1(-1)+4(1)+7(-1)+3(1)+9(-1)=0

نجد أن الخلية التي تعطى تخفيضات للتكلفة الاجمالية هي σ_{32} وهذا يعني أنه يمكن تحسين الحل بادخال x_{32} الى الأساس ، وتم ذلك كما يلي : تعد معرفة الخلية للواجب ادخالها يبقى السؤال المطروح هو كم عدد الوحدات التي يجب ادخالها عبر هذه الخلية والجواب هو بالرجوع الى الخط المغلق الذي يهتم عن طريق هذا المسار ثم ننظر الى

الوحدات الموجودة في الخلايا التي تصاحبها الاشارة السالب ونأخذ أقل قيمة بعض النظر عن الاشارة السالبة ، لتكون هذه القيمة معبرة عن عدد الثلاجات التي يجب ارسالها الى الخانة المختارة ، ليكون الحل كما يلي :

المتغيرة التي تخرج من أساس هي X_{21}. حيث يجب أن تتحول الى قيمة معدومة بإحداث التغير كما في الجدول التالي :

إلى / من	y_1	y_2	y_3	a_i
x_1	**40** (1)	**15** (4)	(5)	55
x_2	(5)	**15** 1- (7)	1+ **30** (3)	45
x_3	(10)	1+ (8)	1- **20** (9)	20
b_j	40	30	50	120 / 120

فيصبح الجدول كالتالي:

إلى / من	y_1	y_2	y_3	a_i
x_1	**40** (1)	**15** (4)	(5)	55
x_2	(5)	**0** (7)	**45** (3)	45
x_3	(10)	(8)	**5** (9)	20
b_j	40	30	50	120 / 120

بما أننا وجدنا الخلية التي تدخل الحل فأن التكلفة الكلية ستنخفض بمقدار .

[2]10.75=15×-5=15. σ_{32}. وحدة نقدية

وهكذا نختبر الحل المتوصل اليه ان كان أمثلا أو لا بنفس الطريقة وذلك باختبار الخلايا الفارغة .

σ_{21}=5-1+4-8+9-3=6 $\qquad$ σ_{13}=5-9+8-4=0

σ_{31}=10-1+4-8=5 $\qquad$ σ_{22}=7-3+9-8=5

بما أن كل التكاليف الحدية أصبحت غير سالبة نقول أن جدول الحل الأساسي الثاني هو جدول الحل الأمثل .

$X_{11}=40$ / $x_{12}=15$ / $x_{23}=45$ / $x_{32}=15$ / $x_{33}=5$

وتتحمل المؤسسة ادنى تكلفة تموين هي 40 ألف دينار .

$$z=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}\,x_{ij} \;=\; 40.1+15.4+45.3+15.8+5.9=400$$

2- طريقة التوزيع المعدل :

تفترض هذه الطريقة وجود مجهولين هما يعتبر عن الأعمدة ويعبر عن الأسطر حيث : $U_i+V_j=C_{ij}$ وهكذا يتم ايجاد المجاهيل v_j و u_i و الخطوة الثانية ايجاد التكاليف الحدية (الوحدوية) للخلايا غير الداخلة في الحل الأساسي وذلك عن طريق المعادلة.

$$\sigma_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$$

وهكذا نكمل بنفس الطريقة السابقة . بالنسبة للخلايا الداخلة في الحل لدينا

$u_i+v_j=c_{ij}$ نفترض u_1 لأول معادلة مساو للصفر .

$U_1+V_1=1 \Rightarrow \quad V_1=1$

$U_1+V_2=4 \quad\Rightarrow\quad V_2=4$

$U_2+V_2=7 \quad\Rightarrow\quad U_2+4=7 \quad\Rightarrow\quad U_2=3$

$U_2+V_2=3 \quad\Leftrightarrow\quad 3+V_3=3 \quad\Rightarrow\quad V_3=0$

$U_3+V_3=9 \quad\Leftrightarrow\quad U_3+0=9 \quad\Rightarrow\quad U_3=9$

	V_1	V_2	V_3	
إلى / من	y_1	y_2	y_3	a_i
x_1	**40** 1	**15** 4	5	55
x_2	5	**15** 7	**30** 3	45
x_3	10	8	**20** 9	20

b_j	40	30	50	120 120

U_1

U_2

U_3

بالنسبة للخلايا غير الداخلة في الحل ، وهي الخطوة الثانية ، يعني تقسيم هذه الخلايا من خلال ايجاد التكاليف الحدية وذلك عن طريق المعادلة .

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

ومنه نلاحظ أن الخلية$x2y3$ هي التي يجب أن تدخل الحل والخلية من الحل كما في طريقة التخطي

σ_{ij}	$\sigma_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$	الخلية
5 1 0 5-	5-0-0 5-3-1 10-9-1 8-9-4	$U_1.V_3$ $U_2.V_1$ $U_3.V_1$ $U_3.V_2$

ونتحصل على جدول مشابه كما للجدول الذي حصلناعليه في طريقة التخطي .

إلى / من	y_1	y_2	y_3	a_i
x_1	**40** 1	**15** 4	5	55
x_2	5	7	**45** 3	45
x_3	10	**15** 8	**5** 9	20
b_j	40	30	50	120 120

نقوم باختبار الخلايا الفارغة من جديد : $U_{1=0}$

$U_1+V_1=1 \Rightarrow \quad V_1=1$

$U_1+V_2=4 \quad \Rightarrow \quad V_2=4$

$U_2+V_3=3 \quad \Rightarrow \quad U_2+5=3 \quad \Rightarrow \quad U_2=-2$

$U_3+V_2=8 \quad \Rightarrow \quad U_3=4$

$U_3+V_3=9 \quad \Rightarrow \quad V_3=5$

وفي الخطوة الموالية نشكل جدول التكاليف الحدية للخلايا غير الداخلة في الحل:

σ_{ij}	$\sigma_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$	الخلية
0	5-0-5	$U_1.V_3$
6	5+2-1	$U_2.V_1$
5	7+2-4	$U_2.V_2$
5	10-4-1	$U_3.V_1$