المقطع الرابع :حالات خاصة في طريقة السمبلاكس والبرنامج الثنائي

حالات خاصة أثناء الحل بطريقة السمبلكس :

1- حالة عدم وجود حل :

في هذه الحالة نصل إلى جدول فيه جميع معاملات السطر الأخير أقل أو تساوي الصفر في حالة التعظيم و أكبر أو يساوي الصفر في حالة التدنية لكن متغيرات الأساس تتضمن متغير إصطناعي أو أكثر ، و هذا ما يوحي بوجود خطاء برنامج

2- عدم محدودية الحل :

و هي الحالة التي تكون فيها جميع عناصر العمود الأمثل أقل أو تساوي الصفر ، حيث يستحيل إختيار المتغيرة التي تخرج من الأساس

3- الانحلال :

هذه الحالة نجد متغيرين أو أكثر قابلين للدخول و الخروج من الأساس

4- حالة عدم تحقيق شرط عدم النسبية :

من المعلوم أنه في طريقة الحل بطريقة السامبلاكس هناك شرط عدم سلبية المتغيرات ، إلا أنه في بعض الأحيان نجد بعض المسائل غير مقيدة بشرط عدم السلبية ، و هنا يجيب التمايل رياضيا وفق الطريقة التالية:

أ- أذا كان أحد المتغيرات أقل أو يساوي الصفر :

أي $x_j \leq 0$ هنا نقوم بالتعديل التالي :

$$x'_i = -x \; ; \; x_j = -x_j'$$

سنتم في الحل إلى غاية النهاية ، ثم نقوم بتعويض x_j بقيمته .

ب- إذا كان أحد المتغيرات حرا : أي أنه يكمن أن ياخذ أي قيمة مهما كانت في الإتجاه السالب أو الموجب $x \in]-\infty, +\infty[$.

و نتعامل مع هذه الحالة على النحو التالي :

$x_j = x_j' - x''_j \; ; \; x'_j \geq 0 \; ; \; x''_j \geq 0$

<u>مثال :</u>

Max z =3 x_1+ 3 x_2

$$\text{s/c} \begin{cases} 5\,x_1 + 6x_2 \;\leq 10 \\ 2\,x_1 + 2x_2 \;\geq 14 \\ x_1 \;\geq 0;\; x_2 \;\;\leq 0 \end{cases}$$

Max z =3 x_1-2 x'_2

$$5\,x_1 + 6x'_2 + s_1 = 10$$
$$2\,x_1 + 2x'_2 + s_2 = 14$$
$$x_1 \;;\; x'_2 \;\; \geq 0$$

$x_1 = 32 \;;\;\; x'_2 = 25 \;;\;;\; z = 21$

إذن : $x_2 = 25$

مثال 2:

Max z =3 x_1+ 10 x_2

$$\text{s/c}\begin{cases}5\,x_1 + 6x_2 \ \le 10\\ 2\,x_1 + 7x_2 \ \le 14\\ \ x_1 \ \ge 0;\forall\, x_2\end{cases}$$

Max z =3 x_1+ 10 x'_2- 10 x''_2

$$5\,x_1 + 6x'_2 - 6x''_2 + s_1 = 10$$
$$2\,x_1 + 7x'_2 - 7x''_2 + s_2 = 14$$
$$x_1\ ;\ x'_2\ ;\ x''_2 \ge 0$$

$$x_1 = 0\ ;\quad x'_2 = \frac{10}{6}\ ;\ x''_2 = 0; s_1 = 0\ ; s = 7/3\ ;\ z = 50/3$$

1- حالة عدم وجود حل :

حل بالطريقتين :

Max z =3 x_1- 2 x_2

$$\text{s/c}\begin{cases}6\,x_1 + 6x_2 \ \le 6\\ x_1 + x_2 \ \ge 2\\ x_j \ \ge 0\end{cases}$$

2- عدم محدودية الحل :

Max z = x_1+ 2 x_2

$$\text{s/c}\begin{cases}-2\,x_1 + 3x_2 \ \le 9\\ x_1 - 2x_2 \ \le 2\\ x_j \ \ge 0\end{cases}$$

البرنامج الثنائي : (المرافق)

كل برنامج خطي مرتبط بالمتغيرات $x_1 x_n$ ..... $x_2,$,

برنامج ثنائي مرتبط بالمتغيرات y_1 y_n ..... $y_2,$, معرف كما يلي :

1- الصيغة القانونية :

إذا كان البرنامج الأولي بالشكل المصفوفي في صيغة القانونية التالية :

Max z = C'X

$$\text{s/c}\begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

فإن برنامجه الثنائي يكون على النحو التالي :

Min z = B'Y

$$\text{s/c}\begin{cases} A'Y \leq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

و تفصيلا :

Max z = c_1x_1+ c_2x_2+ c_3x_3

$$\text{s/c}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

برنامجه الثاني هو :

Max z = b_1y_1+ b_2y_2+ b_3y_3

$$\text{s/c}\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \geq c_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \geq b_2 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \geq b_3 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

و نلخص خطوات تحويل المسألة الأولية إلى ثنائية فيما يلي :

1- تغيير دالة الهدف : إذا كنت max تصبح min و العكس .
2- وضع الأعمدة صفوف في المسألة الثنائية
3- وضع معاملات دالة الهدف في المسألة الأولية (c) هي معاملات الطرف الأيمن في المسألة الثنائية ، وضع الثوابت (b) معاملات دالة الهدف .
4- تغيير جهة المتراجحات

5- تحديد عدد القيود : وفقا لعدد المتغيرات الأساسية فإذا كان لدينا 3 متغيرات أساسية $x_1 \; x_n \; ..... \; x_2 ,$ فهذا يعني أنه لدنيا 3 قيود في المسألة الثنائية ، حتى و إن كان عددها 7 قيود و هكذا تسهل عملية تحويل البرنامج الأولي إلى الثنائي من الوصول إلى الحل الأمثل بسرعة .

مثال :

Min z =3 x_1+ 10 x_2

$$\text{s/c}\begin{cases} 5\,x_1 + 6x_2 \ \geq 10 \\ 2\,x_1 + 7x_2 \ \geq 14 \\ \quad x_1,\ x_2 \ \geq 0; \end{cases}$$

Max z =10 y_1+ 14 y_2

$$\text{s/c}\begin{cases} 5\,y_1 + 2y_2 \ \geq 10 \\ 6\,y_1 + 7y_2 \ \geq 14 \\ \quad y_1,\ y_2 \ \geq 0; \end{cases}$$

$$x_2 = 2\ ; \quad x_1 = \frac{1}{7}\ ;\ ; s_1 = 2\ ; s_2 = 10/7;\ z = 20$$

		10	14	0	0	
		y_1	y_2	s_1	s_2	
0	s_1	5	2	1	0	3
0	s_2	6	7	0	1	10
		10	14	0	0	0

		10	14	0	0	
		y_1	y_2	s_1	s_2	
0	s_1	23/7	0	1	-2/7	1/7
14	y_2	6/7	1	0	1/7	10/7
		-2	0	0	-2	20

نلاحظ أن قيمة دالة الهدف هي نفسها في البرنامجين

$$s_1 = \frac{1}{7} = x_1\ ;\ \ y_2 = \frac{10}{7} = s_2\ ;\ y_1 = -2 = s_1\ ;\ s_2 = -2 = x_2\ ; z = 20$$

و النتيجة هي أن جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يتضمن الحل الأمثل للبرنامج الأولي و العكس .

2- ثنائية الصيغة المختلفة :

في هذه الحالة فإنه يتم إيجاد الثنائية وفق القواعد التالية :

القاعدة 1 : اذا كان القيد في المسألة الأولية فإن المتغير المرافق له في المسألة الثنائية يكون حرا

قاعدة 2: إذا كان أحد المتغيرات في المسألة الأولية حرا فإن القيد المرافق له يكون على شكل يساوي

قاعدة 3 : إذا كان القيد في المسألة الأولية – حالة التعظيم – على شكل ≥ أكبر من أو يساوي يتم تحويله إلى الصيغة القانونية بضرب الطرفين في إشارة (-) .

مثال :

Min z = x_1+ 3 x_2

$$\text{s/c}\begin{cases} x_1 + x_2 \ \geq 4 \\ 2\,x_1 + x_2 \ \leq 6 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Min z = x_1+ 3 x_2

$$\text{s/c}\begin{cases} x_1 + x_2 \ \geq 4 \\ -2\,x_1 - x_2 \ \geq -6 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Max z =4 y_1- 6 $y_2 + 3y_3$

$$\text{s/c}\begin{cases} y_1 - 2y_2 \ \leq 1 \\ y_1 - y_2 + y_3 \ \leq 3 \\ y_1,\ y_2 \ \geq 0; \quad \forall\, y_3 \end{cases}$$

$$y_3 = y'_3 + y''_3$$

و منه نجد :

Max z =4 y_1- 6 $y_2 + 3y'_3$-$3y''_3$

$$\text{s/c}\begin{cases} y_1 - 2y_2 \ \leq 1 \\ y_1 - y_2 + y'_3 - y''_3 \ \leq 3 \\ y_1,\ y_2, y'_3, y''_3 \ \geq 0 \end{cases}$$

		4	-6	3	-3	0	0	
		y_1	y_2	y'_3	y''_3	s_1	s_2	
0	s_1	1	-2	0	0	1	0	1
0	s_2	1	-1	1	-1	0	1	3
		4	-6	3	-3	0	0	0

		4	-6	3	-3	0	0	
		y_1	y_2	y'_3	y''_3	s_1	s_2	
4	y_1	1	-2	0	0	1	0	1
0	s_2	0	1	1	-1	-1	1	2
		0	2	3	-3	-4	0	4

		4	-6	3	-3	0	0	
		y_1	y_2	y'_3	y''_3	s_1	s_2	
4	y_1	1	-2	0	0	1	0	1
3	s_2	0	1	1	-1	-1	1	2
		0	-1	0	0	-1	-3	10

نلاحظ أن عناصر السطر الأخير مماثلة لعناصر عمود الكميات في الجدول الأمثل للبرنامج الأولي حيث :

بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي S1 و هي قيمة تقابل $x_1 = 1$

بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي Y2 و هي قيمة تقابل $s_2 = 1$

بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي S2 و هي قيمة تقابل $x_2 = 3$

قيمة دالة الهدف هي نفسها وهي :

$$y_3 = 2 \;;\qquad y_1 = 1 = s_1$$

مثال:

النموذج الأولي :

Min z =3 x_1+ 10 x_2

$$\text{s/c}\begin{cases} 5\,x_1 + 6x_2 \;\geq 10 \\ 2\,x_1 + 7x_2 \;\geq 14 \\ \quad x_j \;\geq 0; \end{cases}$$

		0	0	0	0	1	1		
		x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
1	A_1	5	6	-1	0	1	0	10	
1	A_2	2	7	0	-1	0	1	14	2
		-7	-13	1	1	0	0	24	

		0	0	0	0	1	
		x_1	x_2	S_1	S_2	A_2	
0	x_2	5/6	1	-1/6	0	0	5/3
1	A_2	-23/6	0	7/6	-1	1	7/3
		23/6	0	-7/6	1	0	

		0	0	0	0	
		x_1	x_2	S_1	S_2	
0	x_2	3/7	1	0	1/7	2
0	S_1	-23/7	0	1	-6/7	2
		0	0	0	0	

		3	10	0	0	
		x_1	x_2	0	0	
10	x_2	2/7	1	0	1/7	2
0	S_1	-23/7	0	1	-6/7	2
		1/7	0	0	10/7	20

Min A = A_1+ A_2

s/c $\begin{cases} 5\,x_1 + 6x_2 - S_1 + A_1 \ \geq 10 \\ 2\,x_1 + 7x_2 \ - S_2 + A_2 \geq 14 \\ \qquad\qquad x_j \ \geq 0; \end{cases}$

النموذج الثانوي

Max z =10 y_1+ 14 y_2

s/c $\begin{cases} 5\,y_1 + 2y_2 \ \leq 3 \\ 6\,y_1 + 7y_2 \ \leq 10 \end{cases}$

	10	14	0	0	
	y_1	y_2	S_1	S_2	
S_1	5	2	1	0	3
S_2	6	7	0	1	10
	10	14	0	0	0

	10	14	0	0	
	y_1	y_2	S_1	S_2	
S_1	23/7	0	1	-2/7	1/7
y_2	6/7	1	0	1/7	10/7
	-2	0	0	-2	