المقطع الثالث: حل البرنامج الخطي بطريقة السمبلاكس

I. البرمجة الخطية : طريقة السمبلكس :

أولا : الصيغة القانونية للبرنامج الخطي :

هناك نوعان من الصيغ القانونية للبرنامج الخطي و هي :

1- حالة التعظيم :

و تكون الصيغة القانونية للبرنامج الخطي في حال التعظيم كما يلي :

أ- دالة الهدف تكون في حالة التعظيم

ب- كل القيود تكون في حالة أصغر أو يساوي عددا ثابتا موجبا

ت- جميع المتغيرات غير سالبة

2- حالة التدنية : هذه الحالة الصيغة القانونية تكون كما يلي :

أ- حالة الهدف في حالة تدنية

ب- جميع القيود أكبر أو يساوي عدد موجبا ثابتا

ت- جميع المتغيرات غير سالبة

ثانيا الصيغة المختلطة :

و هي الصيغة التي تكون فيها دالة الهدف إما تعظيم أو تدنية و القيود المختلفة بحيث تحتوي على متراجحات أكثر أو يساوي و أصغر أو يساوي و معادلات كل ، كل هذه الحالات معا أو حالتين على الاقل

ثالثا : الصيغة النموذجية :

وفي هذه الحالة تكون كل القيود على شكل معادلات أما دالة الهدف ، إما تكون في حالة تعظيم أو تدنية ، و تعتبر الصيغة النموذجية ضرورية لإيجاد الحل للبرنامج بطريقة السمبلكس إذ يتم تحويل أي صيغة مهما كان شكلها في الصيغة النموذجية

رابعا : لإيجاد الصيغة النموذجية و مصفوفة الحل الأساسي:

لإيجاد اليصيغة النموذجية في حالة توه القيد عبارة عن متراجحة لابد من إدخال متغيرات صورية جديدة عن البرنامج بإضافتها و إطراحها حسب الحالة ، لتتحول القيود إلى معادلات و تسمى هذه المتغيرات بمتغيرات الفجوة ، العشوائية ، الرائدة لأنها تسد الفرق بين طرفي المتراجحة و يتم ذلك حسب التالي :

1- **الحالة الأولى :** إذا كان القيد على الشكل التالي :

$a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \cdots a_{1n}x_n \leq b_1$

.

.

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots a_{mn}x_n \geq b_m$

لتحويل القيد إلى الصيغة النموذجية لابد أن نضيف للطرف الأيسر متغير صوري يرمز له بالرمز S و منه يصبح القيد أعلاه على الشكل التالي :

$a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \cdots a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2$

.

.

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \dots a_{mn}x_n = b_m$

و تمثل متغيرات الفجوة إقتصاديا الطاقات المهدرة أو غير المستغلة و ينبغي أيضا إضافة متغيرات الفجوة على دالة الهدف ولكن بمعاملات حدية لأنها ليس لها أي خارج نظام ، و تسمى مصفوفة معاملات القيود المتحصل عليها بعد إضافة متغيرات الفجوة بـ مصفوفة الحل الأساسي

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}.. & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ a_{21} & a_{22}.. & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ a_{m1} & a_{m2}.. & a_{mn} & 0 & & 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}$$

<u>مثال :</u>

Max : Z = 8 x_1+ 6 x_2

$$s/c \begin{cases} 4\,x_1 + 2\,x_2 & \leq \quad 60 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 & \leq \quad 48 \end{cases}$$

, $x_2 \geq 0 x_1$

اولا نحول المتراجحات إلى معادلات :

$$\begin{cases} 4\,x_1 + 2\,x_2 & = \quad 60 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 & = \quad 48 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ثانيا نرتب البيانات في جدول يسمى جدول الحل الأساسي وتكون فيه متغيرات الفجوة كمتغيرات أساس (رئيسية) أما المتغيرات الحقيقية نعتبرها متغيرات خارج الأساس لأن قيمتها في بداية الحل تكون معدومة ، كما تكون قيمة دالة الهدف أيضا معدومة .

		8	6	0	0		
		x_1	x_2	S_1	S_2	b	
0	S_1	4	2	1	0	60	15
0	S_2	2	4	0	1	48	24
	Z	8	6	0	0	0	

نلاحظ من الجدول أعلاه أن قيمة المتغيرات الحقيقة معدومة $x_1 = 0 \quad x_2 = 0$

و قيمة متغيرات الفجوة هي ما يقابلها في عمود الكميات $x_1 = 60 \quad x_2 = 48$ و قيمة دالة الهدف Z=0 .

تطوير الحل المبدئي و الوصول إلى الحل الثاني :

و يعني هذا البحث عن حل يكون أفضل من الحل الأول و ذلك بإدخال المتغيرة التي تعطي أكبر عائد لدالة الهدف ، وعندما تنظر إلى معاملات دالة الهدف الموجودة يمين Z نلاحظ أن أكبر معامل موجود هو 8 و هو يقابل المتغير x_1 ويعني هذا أن المتغير x_1 هو الذي يجب إدخاله قبل أي متغير أخر و يسمى العمود الذي ينتمي إليه المتغيرx بالعمود الأمثل أو عمود عنصر الإرتكاز .

بعد تحديد المتغير الذي يدخل الأساس ، لابد من إيجاد المتغير الذي سيخرج من الأساس و يتم ذلك بقسمة عناصر عمود الثوابت (b_i) على عناصر العمود الأمثل و أصغرها حاصل قسمة موجب تحصل عليه هو الذي يحدد المتغير الذي سيخرج من الأساس حيث أنه يكون مقابلا له .

وفي هذا المثال بعد قسمة عمود الكميات على العمود الأمثل نجد أقل قيمة موجبة هي 15 و هي مقابل المتغير S1.

بعد تحديد المتغير الدخل و المتغير الخارج نقوم ببناء الجدول الثاني كما يلي :

- تستبدل المتغيرة التي ستخرج من الأساس بالمتغيرة التي ستدخل الأساس و ذلك في العمود الأول من الجدول أو ما يسمى بعمود متغيرات الأساس .
- تحويل عمود عنصر الإرتكاز إلى عمود أحادي و ذلك بتحويل عنصر الإرتكاز إلى القيمة 1 وبقية عناصر العمود إلى أصفار .
- نقوم بتحويل سطر عنصر الإرتكاز بقسمة جميع عناصره على عنصر الإرتكاز
- نقوم بتحويل بقية عناصر الجدول بإستخدام قاعدة المستطيلات كما يلي

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & d-\frac{c-b}{a} \end{pmatrix}$$

		8	6	0	0		
		x_1	x_2	S_1	S_2	b	
8	x_1	1	1/2	1/4	0	15	30
0	S_2	0	3	-1/2	1	18	6
	Z	0	2	-2	0	120	

نلاحظ السطر الآخير من جدول (معاملات دالة الهدف) ، اذا كانت كلها أقل من أو يساوي الصفر فهذا يعني أننا أما لجدول الحل الأمثل ، و إذا كانت توجد عناصر موجبة فلا بد من الإستمرار بنفس الطريقة حتى الوصول إلى الحل الأمثل .

		8	6	0	0		
		x_1	x_2	S_1	S_2	b	
8	x_1	1	0	1/3	-1/6	12	30
6	x_2	0	1	-1/6	1/3	6	6
	Z	0	0	-5/3	-2/3	132	

نلاحظ أن السطر الأخير كل معاملاته سالبة و هذا يعني أننا قد وصلنا إلى جدول الحل الأمثل بحيث :

$x_1 = 12$

$x_2 = 6$ z=132 $s_1 = 0$ s_2=0

$$\begin{cases} 7.2 + 2.6 + 1.0 + 0.0 = 60 \\ 2.12.4.6 + 0.0 + 0.0 = 48 \end{cases}$$

Max : Z =15 x_1+ 12 x_2

$$s/c \begin{cases} 3\,x_1 + 6x_2 \ \leq 54 \\ 6x_1 + \ 3\,x_2 \ \leq 48 \\ 9x_1 + \ 9\,x_2 \ \leq 90 \\ \ \ x_1\,;\ x_2 \ \ \geq 0 \end{cases}$$ X1=6 X2=4 s1= 12 z=138

Max : Z =100 x_1+ 60 x_2

$$s/c \begin{cases} 8\,x_1 + 2x_2 \ \leq 40 \\ 6x_1 + \ 9\,x_2 \ \leq 108 \\ 8x_1 + \ 6\,x_2 \ \leq 96 \\ \ \ x_1\,;\ x_2 \ \ \geq 0 \end{cases}$$ X1=12/5 X2=52/5 s3= 72/5

$8.\frac{12}{5} + 2\,.\,\frac{52}{5} = \frac{96+104}{5} = 40$

$6\,.\frac{12}{5} + 9\,.\,\frac{52}{5} = \frac{72+468}{5} = \frac{540}{5} = 108$

$8.\frac{12}{5} + 6\,.\,\frac{52}{5} + \frac{72}{5} = \frac{96+312+72}{5} = \frac{480}{5} = 96$

$Z= 100\ .\,\frac{12}{5} + 60\ .\,\frac{52}{5} = 240+624 = 864$

2- الحالة الثانية : حل البرنامج الخطي في حالة التدنية

1- طريقة bigm : في حال التدنية غالبا ما يكون البرنامج الخطي على النحو التالي :

Min Z=$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots a_{mn}x_n \geq b_2 \end{cases}$$

من أجل حل هذا البرنامج بطريقة Bigm نتبع الخطوات التالية :

أولا : نقول بتحويل المترجحات الى معادلات كما قمنا بذلك في طريقة التعظيم ، إلا أن هذه الحالة تختلف نوعا ما لأنها تقتضي طرح متغيرات الفجوة من الجانب الأيسر للمتراجحة حتى تحقق المساواة ، و إضافة متغير آخر يسمى المتغير الصناعي ARTICIAL VARIABLE و نرمز له بالرمز A و ذلك من أجل إيجاد مصفوفة الوحدة التي يتطلبها الخوارزمية و(حتى لا يكون) (و من أجل تحقيق شرط عدم السلبية) ، أما بالنسبة لدالة الهدف فإن المتغيرات العشوائية بمعاملات صفرية أما المتغيرات الاصطناعية فتحققان بمعاملات كبيرة جدا و نرمز لها بالرمز M حتى تكون المتغيرات المصاحبة لها هي أولا المتغيرات التي تخرج من الأساس لأن مقتضي تصغير الدالة يتطلب إخراج المتغيرات فإن المعاملان الأكبر و هو ما تعمل على أساسه خوارزمية الحل ، بحيث تكون اليغة النموذجية للبرنامج أعلام كما يلي :

Min Z = $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$+ 0 $\sum_{i=1}^{n} s_i$+ M = $\sum_{i=1}^{n} A_i$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \cdots a_{1n}x_n - s_1 + A_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n - s_2 + A_2 = b_2$$

.

.

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \dots a_{mn}x_n \ - s_m + A_m = b_m$

$\geq 0 \quad s_i \geq 0 \ \ A_i \geq 0x_i$

$s_1 \ ; \ s_2 \geq 0 \qquad A_1 \ ; \ A_2 \geq 0 \ \ x_1 \ ; \ x_2 \ \ \geq 0$

ثانيا :

نرتب البيانات في الجدول الأول تكون فيه معاملات الفجوة كمتغيرات رئيسية إذا كانت معاملاتها +1 أو تكون المتغيرات الإصطناعية هي متغيرات الأساس و هي الحالة الأكثر مصادقة و كالعادة المتغيرات الحقيقة تكون متغيرات خارج الأساس

من الصيغة النموذجية السابقة نستخرج قيمة المتغيرات الإصطناعية

$A_1 = \ b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots a_{1n}x_n + s_1$

$A_2 = \ b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \cdots a_{2n}x_n + s_2$

..

..

$A_m = \ b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 \dots a_{mn}x_n + s_m.$

بتعويض قيم المتغيرات الإصطناعية نحصل على :

Z = $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$+ M $\sum_{i=1}^{n} A_i$ = $c_1x_1 + c_2x_2 \dots c_nx_n$+M

و لنفترض أن البرنامج يحتوي على قيدين و متغيرين

$A_1 = \ b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + s_1$

$A_2 = \ b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + s_2$

نقوم بتعويض (البرنامج) المتغيرات الإصطناعية في دالة الهدف أي تكون على الشكل :

Min Z = $c_1x_1 + c_2x_2$+ 0 $s_1 + \ 0 \ s_2 + M \ A_1 + M \ A_2$

تصبح دالة الهدف كالأتي :

Min Z = $c_1x_1 + c_2x_2$+ M $(b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + s_1 \ )$ + M $(b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + s_2 \ )$

نقوم بالنشر و التحليل :

Min Z = $c_1x_1 + c_2x_2$+$Mb_1 - Ma_{11}x_1 - Ma_{12}x_2 + Ms_1$+$Mb_2 - Ma_{21}x_1 - Ma_{22}x_2 + Ms_2$

= $[c_1 - (a_{11} + a_{21} \ )M]x_1$+$[c_2 - (a_{12} + a_{22} \ )M]x_2$+ Ms_1+ Ms_2+ $Mb_1 + Mb_2$

بمساواة الدالة للصفر نحصل على مايلي :

$[c_1 - (a_{11} + a_{21} \ )M]x_1$+$[c_2 - (a_{12} + a_{22} \ )M]x_2$+ Ms_1+ Ms_2 - M$(b_1 + b_2)$

		c_1	c_2	0	0	M	M	
		x_1	x_2	s_1	s_2	+1	+2	b_i
M	A_1	a_{11}	a_{12}	-1	0	1	0	b_1
M	A_2	a_{21}	a_{22}	0	-1	0	1	b_2
	Z	$c_{-1}-(a_{11}+a_{21})M$	$c_2-(a_{12}+a_{22})M$	M	M	0	0	$M(b_1+b_1)$

<u>مثال :</u>

Min z =10 x_1+ 30 x_2

$$\text{s/c}\begin{cases}3x_1+2x_2\geq 6\\ 6x_1+\ x_2\geq 6\\ x_2\geq 2\\ x_1\,;\,x_2\geq 0\end{cases}$$

Min z =10 x_1+ 30 x_2+ MA_1+ MA_2+ MA_3

$$\text{s/c}\begin{cases}3x_1+2x_2-s_1+R_1=6\\ 6x_1+\ x_2-s_2+R_2=6\\ x_2-s_3+R_3=2\\ x_1\,;\,x_2\geq 0\end{cases}$$

		10	30	0	0	0	M	M	M		
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	b_i	
M	A_1	3	2	-1	0	0	1	0	0	6	2
M	A_2	6	1	0	-1	0	0	1	0	6	1
M	A_3	0	1	0	0	-1	0	0	1	2	∞
	Z	10-9M	30-4M	M	M	M	0	0	0	14M	

$$x_1=0\,;\;x_2=0\,;\;S_1=0\,;\;\;S_2=0\;\;\;S_3=0\,;\;R_1=0\,;\;\;R_2=0\,;\;\;R_3=0\,;z=14M$$

بالنسبة للمتغيرة التي تدخل الأساس هي المتغيرة التي تقابل أصغر قيمة سالبة في السطر الأخير ، أما بالنسبة للمتغيرة التي تخرج من الأساس فهي المتغيرة التي تقابل لأصغر نسبة موجبة ناتجة من تقسيم عمود الثوابت على العمود الأمثل

		10	30	0	0	0	M	M	M		
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3		
M	A_1	0	3/2	-1	1/2	0	1		0	3	2
10	x_1	1	1/6	0	-1/6	0	0		0	1	6
M	A_3	0	1	0	0	-1	0		1	2	2
	Z	0	$\frac{170-15M}{6}$	M	$\frac{10-3M}{6}$	M	0		0	10+5M	
			⇧								

		10	30	0	0	0	M		
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_3		
30	x_2	0	1	-2/3	1/3	0	0	2	
10	x_1	1	0	1/9	-2/9	0	0	2/3	6
M	A_3	0	0	2/3	-1/3	-1	1	≈0	0
	Z	0	0	$\frac{170-6M}{9}$	$\frac{-70+3M}{9}$	M	0	200/9	

⇧

		10	30	0	0	0	
		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
30	x_2	0	1	0	0	-1	2
10	x_1	1	0	0	-1/6	1/6	2/3
0	s_3	0	0	1	-1/2	-3/2	0
	Z	0	0	0	5/3	85/3	200/3

بما أن السطر الأخير كلها غير سالبة فنكون قد حصلنا على جدول الحل الأمثل z=20/3 ،

$$x_2 = 2 \quad ; \; x_2 = 2/3$$

و هي نفس النتائج المحصل عليها في الطريقة البيانية .

Min z =3 x_1+ 10 x_2

$$\text{s/c}\begin{cases} 5\,x_1 + 6x_2 \;\geq 10 \\ 2\,x_1 + 7x_2 \;\geq 14 \\ \quad x_1\,;\,x_2 \;\;\geq 0 \end{cases}$$

تحويل البرنامج إلى الصيغة النموذجية

Min z = 3 x_1+ 10 x_2+ $0s_1$+ $0s_2$+ MA_1+ MA_2

$$\text{s/c}\begin{cases} 5x_1 + \;6\,x_2 - s_1 + A_1 = 10 \\ 2x_1 + \;7\,x_2 - s_2 + A_2 = 14 \\ \qquad\quad x_i; s_i; A_i = 5 \end{cases}$$

		3	10	0	0	M	M		
		x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	A_2	b_i	
M	A_1	5	6	-1	0	1	0	10	5/3
M	A_2	2	7	0	-1	0	1	14	2
	z	3-7M	10-13M	M	M	0	0	24M	

⇧

		3	10	0	0	M	
		x_1	x_2	s_1	s_2	A_2	
10	x_1	5/6	1	-1/6	0	0	5/3
M	A_2	-23/6	0	7/6	-1	-7/6	7/3
		$\frac{23M-32}{6}$	0	$\frac{-7M-10}{6}$	M	0	$\frac{50}{3}+\frac{7}{3}M$

		3	10	0	0	
		x_1	x_2	s_1	s_2	
10	x_2	2/7	1	0	-1/7	2
0	s_1	-23/7	0	1	-6/7	2
		1/7	0	0	10/7	20

طريقة المرحلتين : حيث يتم تقسيم حل المسألة في هذه الطريقة غلى مرحلتين

المرحلة الأولى :

بعد وضع المتغيرات الراكدة و الاصطناعية في القيود، نقوم بصياغة دالة هدف جديدة إعتماد على المتغيرات الاصطناعية ، حيث يكون الهدف هو تدنية هذه الدالة

Min A = A_1+A_2......+ A_n

- نضع هذه المعطيات في جدول الحل الأساسي تكون فيه المتغيرات الاصطناعية هي متغيرات الأساس

- نتبع خطوات إدخال و إخراج المتغيرات حتى نصل إلى A=0 ، ونخرج المتغيرات الاصطناعية من الأساس ، وفي حالة عدم التوصل إلى قيمة حدية لـ A فإن البرنامج ليس حل .

المرحلة الثانية :

نعتمد أخر جدول من المرحلة الأولى و نقوم بإستبدال دالة الهدف المؤقتة بدالة الهدف الأصلية ، و نستمر في الحل بطريقة السامبلاكس النهائية

و ليكن لدينا المثال التالي :

Min z =3 x_1+ 10 x_2

$$\text{s/c}\begin{cases} 5\,x_1 + 6x_2 \ \geq 10 \\ 2\,x_1 + 7x_2 \ \geq 14 \\ \quad x_1\,;\ x_2 \ \ \geq 0 \end{cases}$$

$$5x_1 + \ 6\,x_2 - s_1 + A_1 = 10$$

$2x_1 + 7x_2 - s_2 + A_2 = 14$

Min A= $A_1 + A_2$

		0	10	0	0	1	1		
		x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	A_2	b_i	
1	A_1	5	6	-1	0	1	0	10	5/3
1	A_2	2	7	0	-1	0	1	14	2
	z	0-7	-13	1	1	0	0	24	

			0	0	0	1		
		x_1	x_2	s_1	s_2	A_2		
0	x_2	5/6	1	-1/6	0	0	5/3	-10
1	A_2	-23/6	0	7/6	-1	1	7/3	2
		23/6	0	-7/6	1	0	7/3	

		0	0	0	0	
		x_1	x_2	s_1	s_2	
0	x_2	2/7	1	0	-1/7	2
0	s_1	-23/7	0	1	-6/7	2
		23/6	0	0	0	0

هنا نكون قد وصلنا إلى z=0 و ثم إخراج المتغيرات الاصطناعية من الأساس ، إذن ننتقل إلى المرحلة الثانية .

		3	10	0	0	
		x_1	x_2	s_1	s_2	
10	x_2	2/7	1	0	-1/7	2
0	s_1	-23/7	0	1	-6/7	2
		1/7	0	0	10/7	20

بما أن عناصر السطر الأخير موجبة أو معدومة فهذا يعني أننا أمام الحل الأمثل

لنأخذ مثال أخر :

Min z =10 x_1+ 30 x_2

s/c $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 ; x_2 \geq 0 \end{cases}$

$x_2 = 2\ ;\ x_2 = \frac{2}{3}\ ;\ x_2 = 0\,; z = 200/3$

ملاحظة :

اذا كانت القيود أو البرنامج في صيغتها القانونية فإن الحل يكون كما تم بيانيه سابقا ، أما إذا كانت الصيغة مختلفة فأن تحويل هذه الصيغة إلى الصيغة النموذجية فيكون على النحو التالي :

1- **حالة دالة الهدف Min :**

إذا كان القيد ≤ أكبر أو يساوي فإننا نقوم بطرح S و إضافة A .

إذا كان القيد ≤ فإننا نقوم بإضافة S فقط على أن تكون من متغيرات الأساس

إذا كان القيد = يساوي فإننا نقوم بإضافة A فقط.

2- **حالة دالة الهدف Max :**

إذا كان القيد ≤ أقل أو يساوي نقوم بإضافة S

إذا كان القيد ≤ أكبر أو يساوي نقوم بطرح S و إضافة A ، على أن تكون معاملتها M في الهدف بإشارة سالبة

إذا كان القيد = يساوي بإضافة A .