المقطع الثاني:الحل البياني للبرنامج الخطي

حل البرنامج الخطي بيانيا :

و نعني بحل البرنامج الخطي، إيجاد قيم المتغيرات التي تجعل دالة الهدف في أمثل قيمة لها دون تجاوز حدود القيود ، ويمكن إيجاد حل للبرنامج الخطي بطريقتين :

- الطريقة البيانية : وهي شائعة الإستخدام فقط في البرامج التي تحتوي على متغيرين على الأكثر
- طريقة السمبلكس: و هي طريقة تستعمل مهما كان عدد متغيرات البرنامج. و هنا سوف نتطرق لطريقة الحل البياني .

أولا : حالة التعظيم :

لحل برنامج التعظيم لابد من إتباع الخطوات التالية :

1- نحول كل متراجحات القيود الى معادلات
2- نرسم الخطوط المستقيمة لهذه المعادلات
3- نقوم بشطب المناطق يمين المستقيمات لأنها لا تحقق القيودهذا في حالة التعظيم وفيما إذا كانت القيود كلها أصغر أو يساوي ونشطب يسارها اذا كانت القيود اكبر أو يساوي .
4- تحديد المنطقة التي تحقق جميع القيود (منطقة الحلول الممكنة)
5- تحديد نقطة الحل الأمثل : هناك طريقتين :

1- طريقة سحب مستقيم دالة الهدف.

أولا :نجعل دالة الهدف مساوية للصفر ، ونرسم مستقيم هذه المعادلة على نفس المعلم و نسميه (Δ) .

ثانيا: نقوم بتحريك المستقيم (Δ) مرورا بنقطة المبدأ بإتجاه رؤوس منطقة الحل ، وآخر نقطة يمر عليها هذا المستقيم هي النقطة التي تحقق أكبر قيمة لدالة الهدف ، ثم نقوم بتحديد إحدثيات هذه النقطة إما بيانيا أو جبريا

ملاحظة :

في حالة عدم التمكن من تحديد آخر نقطة يصل إليها المستقيم (Δ) ، لعدم القدرة على تميزها من النقاط الآخرى نقوم بتعويض إحدثيات النقاط المشتبه فيها في دالة الهدف و منها نحدد النقطة التي تعطي أعظم قيمة لدالة الهدف .

2- طريقة تحديد زوايا منطقة الحل :

حيث نقوم بتعويض إحداثيات الزوايا منطقة الحل في دالة الهدف و نقطة الحل الأمثل هي التي تحقق أعلى قيمة في دالة الهدف

$$\text{Max : } Z = 8\,x_1 + 6\,x_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 4\,x_1 + 2\,x_2 & \leq & 60 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 & \leq & 48 \end{cases}$$

$$, x_2 \geq 0 \qquad\qquad x_1$$

1- تحويل المتراجحات الى معادلات :

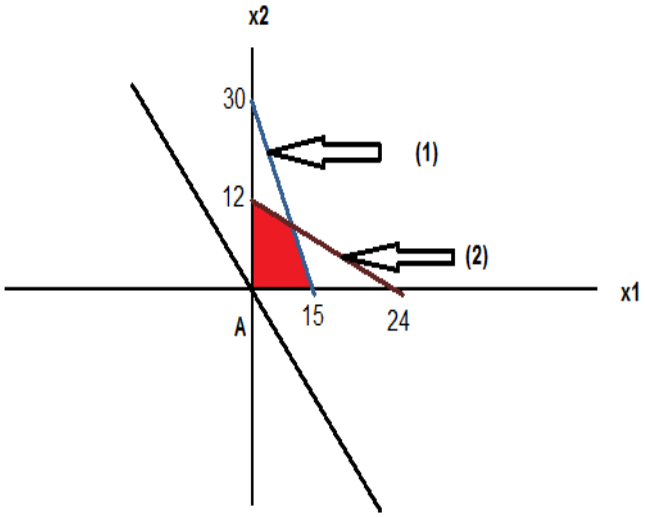
$$4\,x_1 + 2\,x_2 = 60 \dots\dots\dots 1$$
$$2\,x_1 + 4\,x_2 = 48 \dots\dots\dots 2$$

2- نقوم بإيجاد قيمة المتغيرين $x_1 . x_2$ من كل معادلة على حدا

المعادلة 1 : $x_2 = 0\ x_1 = 15$ ، $x_1 = 0\ x_2 = 30$

المعادلة 2 : $x_2 = 0\ x_1 = 24$ ، $x_1 = 0\ x_2 = 12$

x_1	0	15	x_1	0	24
x_2	30	0	x_2	12	0



اذن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة الناتجة عن دمج المنطقتين اللتين تحققان القيدين (1) و (2)

3- نقوم برسم مستقيم دالة الهدف مسالاتل

A(0 ,0) ; E (3,-4) $8\,x_1 + 6\,x_2 = 0$

$\Longleftrightarrow = -3\,x_2 8\,x_1 = -6\,x_2$

عند سحب المستقيم ($\triangle$) نحو الأعلى نجد أن أخر نقطة يمر بها في منطقة الحلول الممكنة هي النقطة (C) .

$Z = 8\,x_1 + 6\,x_2$

نقوم بإيجاد إحداثيات النقطة c .

النقطة c ناجمة عن تقاطع المستقيمن (1) و (2) :

$$\begin{cases} 4\,x_1 + 2\,x_2 = 60 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 = 48 \end{cases}$$

نقوم بضرب المعادلة (1) في العدد 2 ثم نطرح منها المعادلة (2)

$$\begin{cases} 8\,x_1 + 4\,x_2 = 120 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 = 48 \end{cases}$$

$6\,x_1 = 72$ $\qquad$ $x_1 = 12$

نعوض قيمة x_1 في المعادلة(1) نجد $x_2 = 6$

نقوم بتعويض إحداثيات النقطة c (12 ;6) في دالة الهدف نجد :

Z= 8*12+6*6 = 96+36 = 132

إذن أعظم قيمة يمكن أن تأخذها دالة الهدف في حدود الإمكانيات المتاحة هي Z=132 بحيث :

4*12+02*6=60

تم استنفاذ كل الطاقة المتاحة في القسم A و القسم B

4*12+4*6=48

ثانيا : حالة التدنية :

الفرق بين هذه الحالة و حالة التعظيم هو أننا نقوم بشطب المناطق التي تكون يسار المستقيمات الممثلة لمعادلات القيود ، ونقطة الحل الأمثل هي أول نقطة تلامس مستقيم دالة الهدف عند سحبه من نقطة المبداء

مثال :

أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي بالطريقة البيانية :

Min z = $10\,x_1 + 30\,x_2$

s/c $\begin{cases} 3\,x_1 + 2\,x_2 \geq 6 \\ 6\,x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_2 \geq 2 \end{cases}$

$3\,x_1 + 2\,x_2 = 6$ ….1

$6\,x_1 + x_2 = 6$ ……2

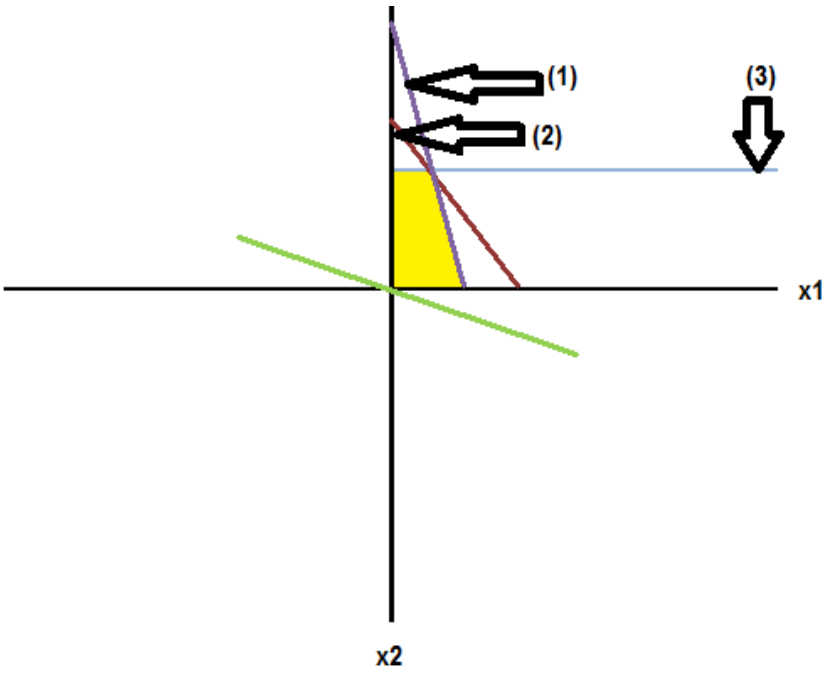
$x_2 = 2$ ……..3

$x_1 \geq 0$ $\qquad$ $x_2 \geq 0$

x_1	0	2
x_2	3	0

x_1	0	1
x_2	6	0

x_1	0	3
x_2	6	-1



من خلال الرسم نلاحظ أن منطقة الحل الأمثل هي المنطقة غير المشطبة و بالتالي عندما نمرر خط دالة الهدف على زوايا منطقة الحل و هما النقطتين A و B نجد أن اول نقطة يلامسها المستقيم هي النقطة A ، وهي التي تحقق لنا أول تكلفة .

إذن : لتحديد إحداثيات النقطة A.

A تقع على المستقيم الثالث و هو $x_2 = 2$ إذن نقوم بتعويض هذه القيمة في إحدى المعادلتين ، لأن كلا المستقيمن يتقطعان في النقطة A .

$$6\,x_1 + 2 = 6 \quad x_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

إذن نعوض A في دالة الهدف :

$$Z=10(\frac{2}{3}) + 30(2) = \frac{200}{3}$$

<u>حالات خاصة في الحل البياني :</u>

<u>أولا : لدالة الهدف عدد لا نهائي من الحلول :</u>

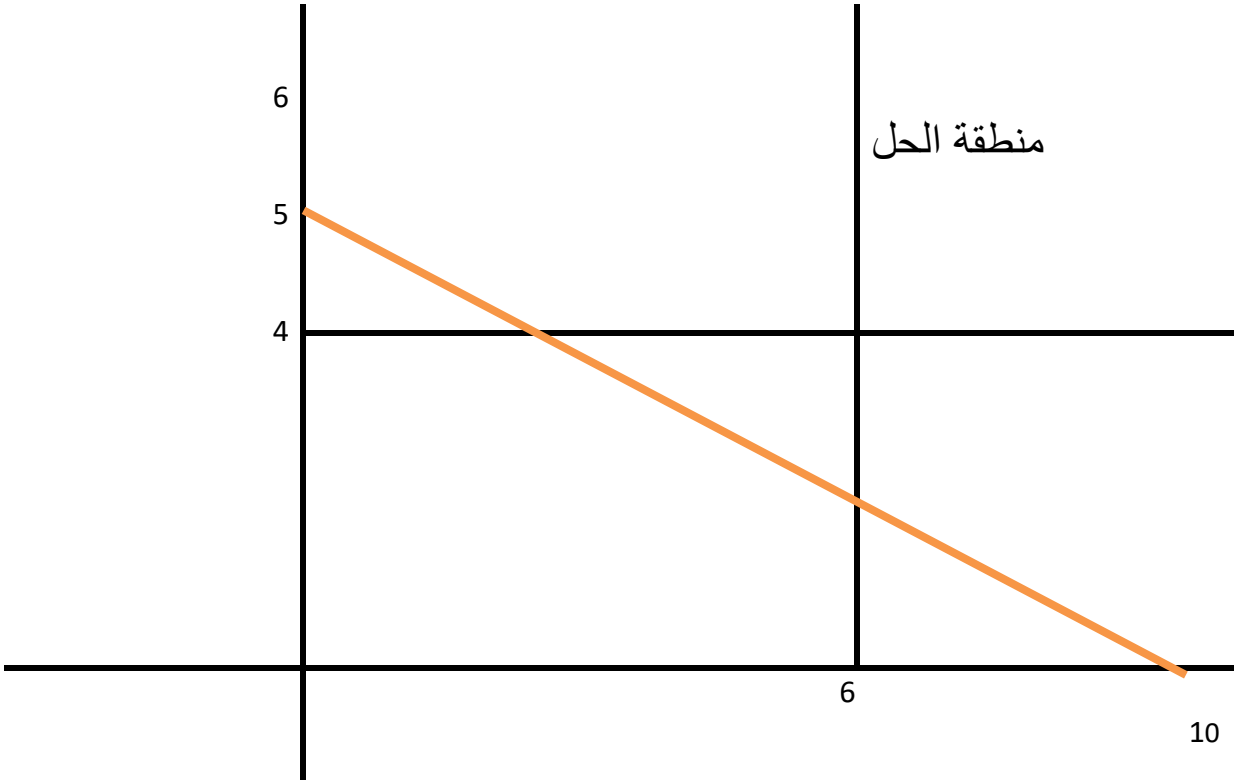
في حالة التعظيم تكون غالبية القيود أقل أو يساوي مقدار ثابت ، غير أنه في بعض الأحيان يكون هناك تناقض بين بين دالة الهدف و القيود فتكون هذه الآخيرة كلها أكبر أو يساوي في حالة التعظيم و هذا ما يجعل دالة الهدف تأخذ قيمة لانهائية و بالتالي لايمكن حينئذ تحديد حل نهائي للدالة .

مثال : حدد منطقة الحل الممكن للبرنامج التالي :

$$\text{Max : } Z = 2\,x_1 + 4\,x_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 4\,x_1 + 8\,x_2 \geq 40 \\ x_1 \geq 6 \\ x_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$, x_2 \geq 0\ x_1$$



من خلال هذا الشكل نلاحظ أنه لا توجد نقطة تحقق الحل الأمثل لأننا كلما عوضنا يمين منطقة الحل نجد قيم أكبر لدالة الهدف و بالتالي نقول أن دالة الهدف غير نهائية

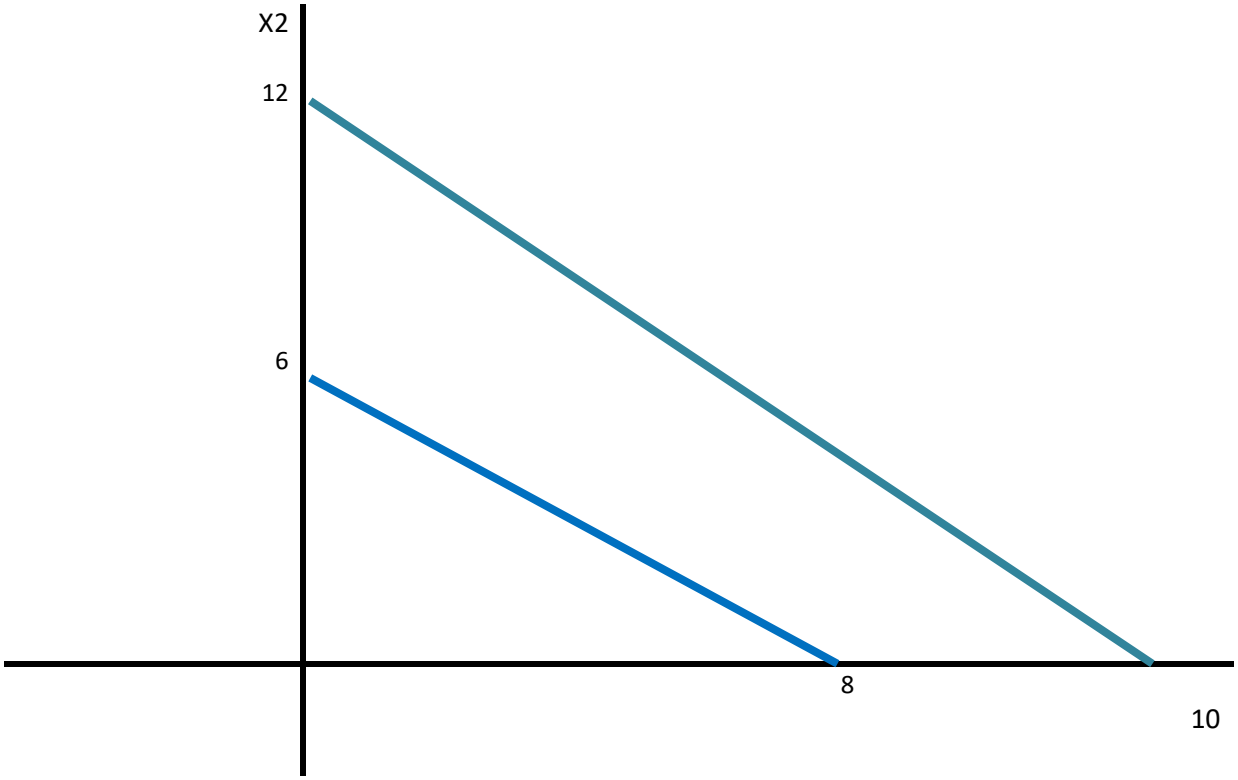
ثانيا : عدم وجود منطقة الحل

وهذا يكون عندما تكون القيود متناقضة

مثال :

Max : $Z = 2\,x_1 + 4\,x_2$

$$s/c \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 12 \\ 3\,x_1 + 4\,x_2 \leq 24 \\ x_1\,;\,x_2 \geq 0 \end{cases}$$



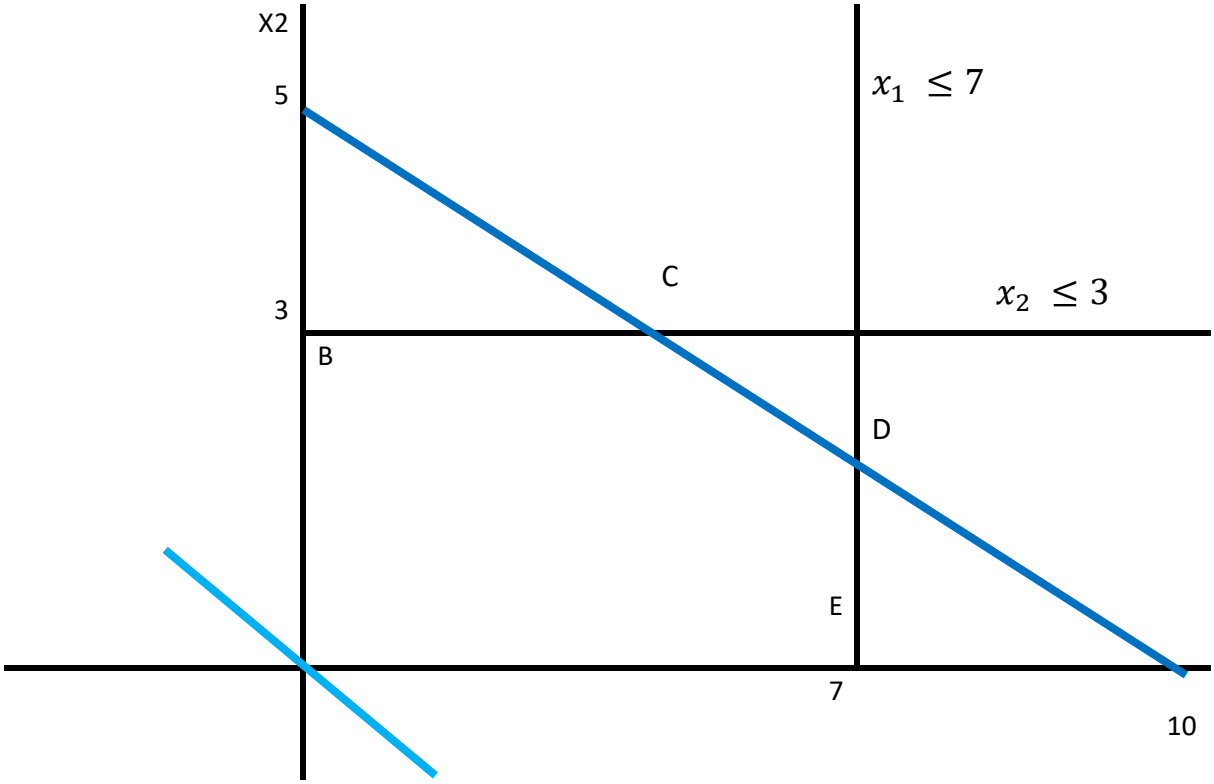
الحالة الثالثة : وجود أكثر من حل أمثل (تعدد الحلول) :

و في هذه الحالة (عندما يقدم الرسم البياني أكثر من حل واحد أمثل للمشكلة) يعني أنه هناك حرية لمتخذ القرار في إختيار البديل المناسب .

مثال :

Max : Z = $x_1 + 2\ x_2$

$$\text{s/c} \begin{cases} x_1 \leq 7 \\ x_2 \leq 3 \\ 1.5\ x_1 + 3\ x_2 \leq 15 \\ x_1\ ;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



بعد حل النموذج نجد :

Max Z(A) = 0
Max Z(B) = 6
Max Z(C) = 10
Max Z(D) = 10

نلاحظ أن النقطتين C و D تحققان أعلى قيمة و هي 10 و منه نستطيع إعتبارهما حلين أمثلين ، وفي الواقع يوجد أكثر من حلين لأننا إذا عوضنا أي نقطة تقع على القطعة [C ;D] نحصل على نفس النتيجة .

و تصادف هذه الحالة عندما يكون مستقيم دالة الهدف موازيا لأحد مستقيمات القيود في أعلى منطقة للحل ، في حال التعظيم و في أدنى منطقة الحل إتجاه اليسار في حال التدنية

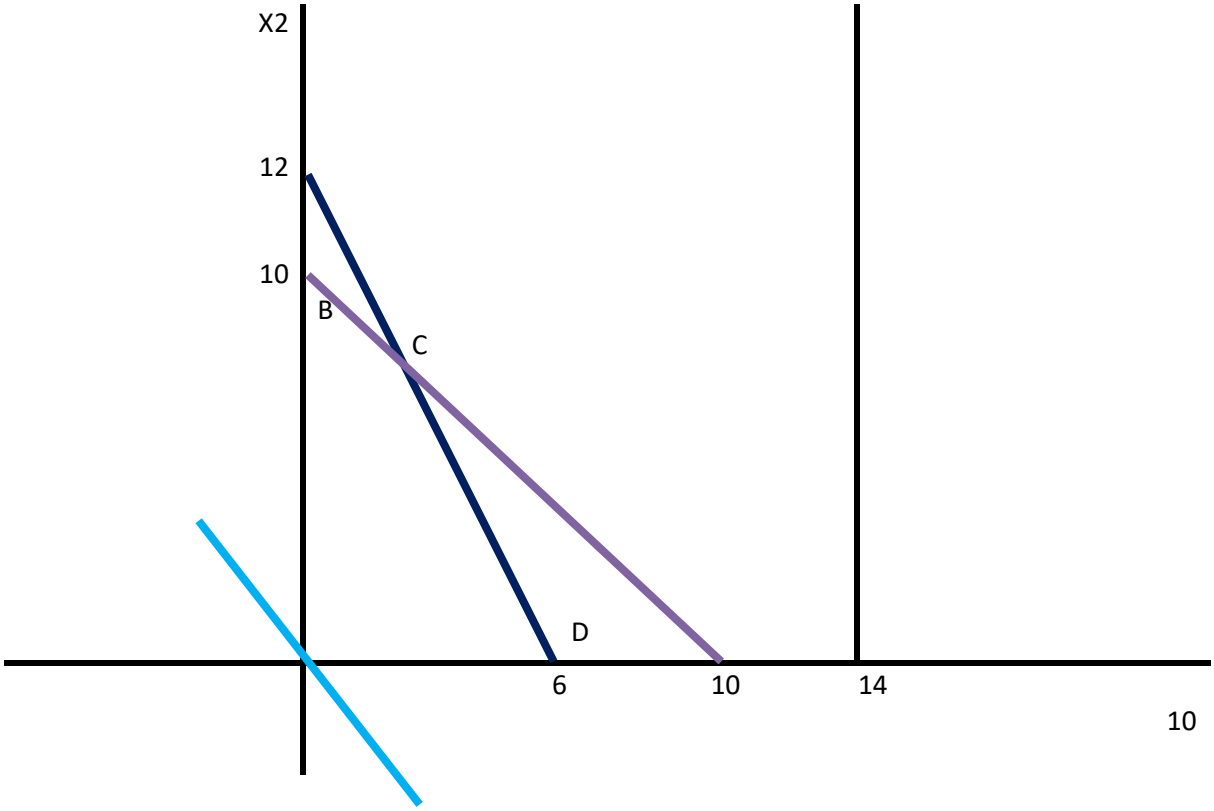
<u>رابعا : حالة حياد أحد القيود :</u>

في هذه الحالة فإن أحد القيود و الذي هو جزء من المشكلة لا يؤثر على أي حل من الحلول الممكنة ، بعبارة أخرى يمكن حذف هذا القيد دون أن يؤثر ذلك على البرنامج.

مثال :

Max : Z =9 x_1+ 2 x_2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 \leq 14 \\ x_1 ; x_2 \geq 0 \end{cases}$$


X2
12
10
B
C
D
6
10
14
10