

Courbes elliptiques TD 01

Exercice 1. Trouvez tous les points singuliers des courbes suivantes

① $C_1 : y - x^2 = 0.$

② $C_2 : x^2 - y = 1.$

Exercice 2. Supposons le polynôme homogène de degré 3

$$F(x, y, z) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{3-i} a_{ij} x^{3-i-j} y^i z^j,$$

et soit C la courbe définie par $F = 0$.

Pour $P = [1 : 0 : 0] \in \mathbb{P}^2$, montrer que les assertions suivantes sont vrais.

① $P \in C$ ssi $a_{00} = 0$.

② P est un point singulier de C ssi $a_{00} = a_{10} = a_{01} = 0$.

③ P est un point triple de C ssi

$$a_{00} = a_{10} = a_{01} = a_{11} = a_{20} = a_{02} = 0.$$

Exercice 3. Trouver tous les valeurs de $a \in \mathbb{C}$ de sorte que les lignes suivantes

$$ay - z + 3ix = 0, \quad -iax + y - iz = 0, \quad 3iz + 5x + y = 0$$

sont coïncident dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Exercice 4. Montrer que les points

$$[1, 2, 2], \quad [3, 1, 4], \quad [2, -1, 2]$$

de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sont colinéaires, et trouver l'équation du tangente qui passe par ces points.

Exercice 5. Soit

$$E/\mathbb{Q} : y^2 + 43xy - 210y = x^3 - 210x^2.$$

Trouver un changement de variables inversible qui transforme E vers la (FW):

$$y^2 = x^3 + Ax + B.$$

Exercice 6. Soit $(E, \mathcal{O}) : y^2 = x^3 + Ax + B$. $A, B \in \mathbb{Z}$ une (CE) sur $\mathbb{Q}$.

- ① Soient $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2) \in E(\mathbb{Q})$. Trouvez les points rationnels $P + Q, 2P$, et $-P$.
- ② Trouvez $\hat{E}$ la (FW) de E dans les coordonnées homogènes i.e. dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$.
- ③ Soit $L : y = ax + b$ une droite. Montrez que si L coupe E en 2 points, alors L coupe E en 3^{eme} point.

Exercice 7. Soit $(E, \mathcal{O}) : y^2 = x^3 + 1$ une (CE) sur $\mathbb{Q}$, et soit $P = (2, 3)$.

- ① Montrez que $P \in E/\mathbb{Q}$.
- ② Calculer dans $E(\mathbb{Q})$ les points $nP, n \geq 2$.

Exercice 8. Soit $(E, \mathcal{O}) : y^2 = x^3 + x + 1$ une (CE) sur $\mathbb{F}_{23}$.

- ① Trouvez tous les points de $E(\mathbb{F}_{23})$.
- ② Soient $P = (9, 7), Q = (3, 10)$, calculer $P + Q, 2Q$.

Exercice 9. Soient le corps $\mathbb{F}_{2^4}$ généré par la racine α du polynôme irréductible $x^4 + x + 1$ sur $\mathbb{F}_2$, et la (CE) sur $\mathbb{F}_{2^4}$ définie par

$$y^2 + xy = x^3 + \alpha^4 x^2 + 1.$$

- ① Trouvez tous les points de $E(\mathbb{F}_{2^4})$.
- ② Soient $P = (\alpha^6, \alpha^8), Q = (\alpha^3, \alpha^{13})$, calculer $P + Q$, et $2P$.