المحور الخامس: المسائل الثنائية في البرمجة الخطية Dual Problems

تمهيد:

المشكلات التي تمت دراستها في الفصول السابقة تُعرف باسم **المسائل الأصلية(Primal Problems)** ، والتي يُشار إليها اختصارًا بالرمز) PPPنسبة إلى كلمة .(*Primal*
ولكل مسألة أصلية في البرمجة الخطية، يوجد ما يُعرف بـ **المسألة الثنائية(Dual Problem)** ، وهي مسألة مكافئة للمسألة الأصلية من حيث المعطيات والخصائص، لكنها تُعالج من منظور مختلف.

يمكن توضيح العلاقة بين المسألتين على النحو التالي:

- لكل مسألة برمجة خطية تهدف إلى **التعظيم(Maximization)** ، يوجد مقابل لها مسألة ثنائية تهدف إلى **التقليل (Minimization)**.
- وبالمثل، فإن لكل مسألة تقليل، توجد مسألة مكافئة لها تأخذ شكل التعظيم.

ووفقًا لهذا التصور، فإن **المسألة الأصلية** تركز غالبًا على **الجوانب الكمية الاقتصادية**، مثل: حجم الإنتاج، الطلب، الدخل، الخدمات، المخزون، النقل... وغيرها.
أما **المسألة الثنائية**، فهي تهتم بالجوانب **المالية**، حيث تبحث في كيفية تأثر دالة الهدف بالتغيرات المحتملة في الموارد المتوفرة، سواء كانت زيادة أو نقصانًا، وتُحلل هذه التأثيرات من زاوية القيمة المالية المرتبطة بكل مورد.

(بوقرة ,2009صفحة100) .

1) صياغة المسألة الثنائية:

الشكل الأساسي لعلاقة الثنائية يمكن التعبير عنه كالآتي:

لمسائل الأصلية على الصورة Max:

$$Max\ Z_p = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$$

حيث:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الشكل المعياري للمسألة الأصلية هو:

$$Max\ Z_p = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$$

حيث:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + S_1 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + S_2 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + S_3 = b_3$$
$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

الثنائية تكون كالتالي:

$$Min\ Z_d = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3$$

حيث:

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 \geq c_1$$
$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 \geq c_2$$
$$a_13u_1 + a_23u_2 + a_{33}u_3 \geq c_3$$
$$u_1\ , u_2\ , u_3 \geq 0$$

حيث $(u_1\ , u_2\ , u_3)$ تمثل متغيرات الثنائية

من هذا التحول يلاحظ أن استنتاج الثنائية من الأصلية كان بالطرق التالية:

أ. تغيير المتغيرات الأصلية x_i بمتغيرات ثنائية u_j.

ب. **ب** .يتم استخدام **معاملات دالة الهدف في المسألة الأصلية** كقيم في **الطرف الأيمن لقيود المسألة الثنائية.**

ت. **ج** .تُستخدم **قيم الطرف الأيمن من قيود المسألة الأصلية** كمعاملات لدالة الهدف في المسألة الثنائية.

ث. **د** .يتم أخذ **المصفوفة الخاصة بالطرف الأيسر من قيود المسألة الأصلية**، ثم **نقلها أو عكسها** (Transposition)، لاستخدامها كمصفوفة لقيود المسألة الثنائية.

ج. **هـ** .ويوضح الجدول التالي بعض التعديلات والتحويلات الأخرى التي تطرأ عند الانتقال من المسألة الأصلية إلى المسألة الثنائية.

الأصليـة	**الثنائيـة**		
هدف الأصلية في الشكل المعياري	**الهـدف**	**القيـود**	**المتغيـرات**
$Max\ Z_p$	$Min\ Z_d$	$\geq$	غير مقيد
$Min\ Z_p$	$Max\ Z_d$	$\leq$	غير مقيد

لتوضيح ذلك نأخذ المثال التطبيقي التالي:

$$Max\ Z_p = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

لإيجاد الثنائية، نحول الأصلية إلى الصورة المعيارية.

$$Max\ Z_p = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0s_1 - Mt_2$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + t_2 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, t_3 \geq 0$$

قواعد تحويل المسألة الأصلية إلى مسألة ثنائية:

عند بناء المسألة **الثنائية** انطلاقًا من المسألة **الأصلية**، يجب مراعاة النقاط التالية:

1. **عدد متغيرات المسألة الثنائية** يساوي **عدد القيود في المسألة الأصلية.**
2. **عدد قيود المسألة الثنائية** يساوي **عدد المتغيرات في المسألة الأصلية.**
3. **القيم في الطرف الأيمن لقيود الأصلية** تُصبح **معاملات دالة الهدف في الثنائية.**
4. **معاملات دالة الهدف في الأصلية** تُستخدم كـ **قيم للطرف الأيمن في قيود الثنائية.**
5. **الطرف الأيسر لقيود الثنائية** يتكوّن من **منقول (Transpose) مصفوفة الطرف الأيسر لقيود الأصلية.**
6. إذا قمنا بتحويل المسألة الثنائية إلى ثنائية مجددًا، فإننا نعود إلى المسألة الأصلية؛ **أي أن ثنائية الثنائية هي الأصلية نفسها.**

الثنائية: $Min\ Z_d = 10u_1 + 8u_2$

$$u_1 + 2u_2 \geq 5$$
$$2u_1 - u_2 \geq 12$$
$$u_1 + 3u_2 \geq 4$$
$$u_1 \geq 0$$
$$u_2 \geq -M$$

هذا يستلزم أن u_2 غير مقيد.

2) العلاقة بين الأصلية الثنائية:

هناك مجموعة من العلاقات التي تربط بين الأصلية والثنائية تتمثل في (بوقرة ,2009صفحة105) :

أ. إذا كان يوجد حل أمثل للأصلية فإنه بالضرورة يوجد حل أمثل للثنائية.

ب..من خلال حل (الأصلية، الثنائية)، فإن هدف الأصلية يساوي هدف الثنائية أي أن:

$$Min\ Z_p = Max\ Z_d \quad و \quad Max\ Z_p = Min\ Z_d$$

ج. مسائل Max للأصلية تبدأ قيمة الهدف لها في تزايد من جدول إلى آخر وصولاً إلى الحل الأمثل، بينما الثنائية لها، قيمة الهدف تبدأ في تناقص من جدول إلى آخر وصولاً إلى الحل الأمثل والعكس في حالة Min

د. لأي زوج للأصلية وللثنائية حل عملي.

هـ. يمكن إيجاد متغيرات الأصلية من الحل الأمثل للثنائية مباشرة والعكس صحيح، وهذا عن طريق العلاقة التالية:

الفرق بين الطرف الأيسر والأيمن لقيد الثنائية المشارك مع المتغير الأساسي للأصلية	=	عناصر السطر Z_p لمصفوفة المتغيرات الأساسية للأصلية

وتكون هذه العلاقة صالحة بتغيير مصطلحات الثنائية والأصلية لكل حالة.

و. كما يمكن اختصار بعض الاختلافات بين الأصلية والثنائية في الجدول التالي:

	الأصلية	الثنائية
المتغيرات	وحدات منتجة نهائية	هامش القيمة للمورد (قيمة الوحدة للمورد) أو مقدار زيادة دالة الهدف في حالة إضـــافة وحدة واحدة من المورد
دالة الهدف	تعظيم الربح أو تخفيض التكلفـة (عـدد الوحـدات المنتجـة) (هـامش الربح للوحدة أو هامش التكلفة)	تخفيض هـامش القيمـة أو العكس (قيمـة الوحدة للمورد) (المادة المستعملة)
القيود	قيود على استعمال الموارد النادرة	لزوم لزيادة الربح لكل منتج

كما يمكن إعطاء ملخص عام حول العلاقة بين (الأصلية، الثنائية) وهذا حسب الجدول التالي:

عمود الأساس	متغيرات البرنامج				عمود الطرف الأيمن للقيود
	x_1	x_2	$\ldots . x_i$	$\ldots . x_n$	
S_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots . a_{1i}$	$\ldots . a_{1n}$	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots . a_{2i}$	$\ldots . a_{2n}$	b_2
S_i	a_{j1}	a_{j2}	$\ldots . a_{ji}$	$\ldots . a_{jn}$	b_i
S_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots . a_{mi}$	$\ldots . a_{mn}$	b_n
Z_p	c_1	c_2	$\ldots$ c_l	$\ldots$ c_n	

الطرف الأيمن لقيود الثنائية

معاملات الهدف للثنائية

مقلوب المصفوفة للطرف الأيسر لقيود الثنائية