الفصل الثاني: "حل المعادلات الغير خطية"

1- مقدمة

معظم المشاكل التي تظهر عند حل المعادلات الغير خطية $f(x)=0$ خاصة اذا كانت f كثير حدود درجته أكبر من 3 أو f دالة مركبة لا نستطيع حلها بالطرق الكلاسيكية لذلك نلجأ لتقنيات أخرى تسمى بالطرق العددية (Methodes numériques)، من بين الطرق التي سندرسها هي: طريقة التنصيف، التقريبات المتعاقبة، نيوتن - رافسون.

2- مواقع الجذور

تتطلب تحديد المجال $[a,b]$ الذي يحتوي على أغلب الطرق العددية جذر وحيد يسمى بالجذر المنفصل (α الخاص بـ $f(x)=0$).

2.2 نظرية (نظرية القيم المتوسطة)

لتكن f دالة مستمرة ومعرفة على المجال $[a,b]$:

* اذا كان $f(a)\cdot f(b)<0$، يوجد على الأقل حل حقيقي $c\in[a,b]$ حيث $f(c)=0$
* اذا كانت أيضا f رتيبة فالحل c وحيد. ($f'(x)\neq 0$ من أجل كل $x\in[a,b]$)

ملاحظة: لايجاد المجال $[a,b]$ الذي يحقق الشرطين السابقين نستعمل الطريقة البيانية، بحيث نرسم منحنى $f(x)$ ونختار المجال $[a,b]$ بحيث يشمل فاصلة النقطة التي يتقاطع فيها البيان مع محور الفواصل. أو يمكننا كتابة الدالة $f(x)$ على الشكل $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$، بحيث تكون f_1 و f_2 على أبسط شكل ممكن، ونختار المجال $[a,b]$ بحيث يشمل فاصلة نقطة تقاطع منحنى f_1 مع منحنى f_2.

3.1 طريقة التنصيف (Methode de dichotomie (bissection))

بعد عملية العزل للجذر في مجال محدد $[a,b]$، نقوم بتنصيف المجال باعتبار النقطة $x_0=\dfrac{a+b}{2}$ لنتحصل على حالتين:

الحالة الأولى: اذا كان $f(x_0)=0$ ، اذن $\alpha = x_0$

الحالة الثانية: اذا كان $f(x_0)\neq 0$ ، اذن الجذر α يوجد في احد

المجالين $[a,x_0]$ ، $[x_0,b]$ حيث:

* اذا كان $f(a)\cdot f(x_0)<0$ فإن $\alpha\in[a,x_0]$ ، فيصبح مجال جديد $[a_1,b_1]$
* " " $f(x_0)\cdot f(b)<0$ " $\alpha\in[x_0,b]$ ، " " " $[a_1,b_1]$

- نعيد عملية التنصيف باعتبار نقطة أخرى $x_1=\frac{a_1+b_1}{2}$ لنحصل على حالتين:

الحالة الأولى: اذا كان $f(x_1)=0$ ، اذن $\alpha = x_1$

الحالة الثانية: بنفس طريقة المرحلة السابقة نحصر α في المجال $[a_2,b_2]$ الذي يعتبر طوله نصف طول المجال $[a_1,b_1]$ وطول هذا الأخير هو نصف طول المجال $[a,b]$. ومن خلال تكرار العملية نحصل على متتالية نقاط:

$x_0=\frac{a+b}{2}$ ، $x_1=\frac{a_1+b_1}{2}$ ، ... ، x_n ، $x_{n+1}=\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$ عن (n تكرار).

في الأخير نأخذ x_n كقيمة تقريبية للجذر α باستعمال (n تكرار) لعملية ما، يجب علينا معرفة عدد التكرار اللازم (n) لعملية ما، يجب علينا

واذا أردنا معرفة عدد التكرار اللازم (n) (هذه العلاقة تسمح باختبار التوقف) $|a-b|\leq\varepsilon$ ، حيث ε مقدار التقريب.

ملاحظة: نتحصل على علاقة n بعد عدة عمليات رياضية تبسيطية وتكتب علاقته بالشكل التالي:

$$n\geq\frac{\ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{\ln 2}$$

مثال 2.1: لتكن الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x)=x-(0,2)\cdot\sin(x)-0,5$

اوجد القيمة التقريبية لـ (α) باستعمال طريقة التنصيف حيث $\varepsilon=0,5\times10^{-1}$ ، والمجال هو $[0,2]$.

الحل:

2.3 طريقة التقريبات المتعاقبة (أو النقطة الثابتة)

المعادلة $f(x)=0$ يمكن كتابتها دوما على الشكل المكافئ وهو $x=g(x)$

نظرية 1.2.3 ليكن $[a,b]$ مجال من $\mathbb{R}$ ولتكن g دالة معرفة في هذا المجال، إذا كانت g مستمرة فإنه توجد $\alpha\in[a,b]$ بحيث تحقق $g(\alpha)=\alpha$ تسمى بالنقطة الثابتة للدالة g.

- هذا يعني أن تقارب الدالة f نحو الصفر يقابله تقارب الدالة g نحو النقطة الثابتة، وعلى هذا الأساس تم استخدام طريقة لايجاد النقطة الثابتة عن طريق انشاء متتالية $\{x_n\}_{n\geq 0}$ يكون فيها التكرار كالتالي:

$$\begin{cases} x_0 & \text{التقريب الإبتدائي المعطى} \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

لذلك تسمى بطريقة التقريبات المتتالية أو طريقة النقطة الثابتة.

مثال 3: اكتب الدالة $f(x)=0$ على الشكل $x=g(x)$ حيث $f(x)=\ln x - x^2+2$

الحل:

لإختيار الدالة g المناسبة للحساب يجب ان تحقق شروط التقارب لهذه الطريقة.

1.2.3 معايير التقارب:

لتكن g دالة قابلة للاشتقاق، معرفة على المجال $[a,b]$ حيث:

$$|g'(x)|\leq k<1 \quad \forall x\in[a,b] \quad \text{(شرط التقارب)}$$

اذا كانت هناك عدة أشكال من $g(x)$ تحقق هذا الشرط، اي لدينا عدة قيم للثابت k، نختار الذي يملك أقل قيمة، والقيمة k تكتب كمايلي:

$$k = \max_{x\in[a,b]} |g'(x)|$$

2.2.3 معيار التوقف:

يمكننا التوقف عن الحساب اذا كانت القيمة المطلقة للفرق بين تكرارين متتابعين x_n و x_{n+1} اصغر من قيمة الدقة المعطاة:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

أو يمكننا حساب عدد التكرارات اللازمة (n) للوصول للقيمة التقريبية للعدد α بالدقة ε بنفس مبدأ طريقة التنصيف:

$$n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-k)}{|x_1 - x_0|}\right)}{\ln k}$$

مثال:

3.3 طريقة نيوتن - رافسون "Newton-Raphson" (أو طريقة المماس)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[a,b]$ حيث f هي دالة قابلة للاشتقاق مرتين على المجال $[a,b]$. لتكن α الحل المضبوط للمعادلة $f(x)=0$.

اذا كانت f مستمرة و قابلة للاشتقاق في جوار α فإن نشر تايلور من الدرجة 1 في جوار x_0 يكتب كما يلي:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x)}{1!}(x - x_0)$$

نضع $x = \alpha$ نجد:

$$f(\alpha) = f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{f'(x_0)} = -(\alpha - x_0) \Rightarrow \alpha = x_0 - \frac{f(x)}{f'(x_0)}$$

بالنسبة لـ $(i+1)$ تكرار نجد العلاقة:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)} \\ x_0 \text{ معطى} \end{cases}$$

2.3.3 معايير التقارب:

لتكن f دالة معرفة على $[a,b]$ حيث:

1) $f(a)\cdot f(b)<0$

2) $f'(x)$ و $f''(x)$ غير معدومين ويحافظان على اشارة ثابتة على المجال المعطى.

3.3.3 معيار التوقف

يمكننا التوقف عن الحساب اذا تحقق بنفس طريقة النقطة الثابتة

$$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$$

ما يلي: ونأخذ x_{n+1} كحل تقريبي للمعادلة $f(x)=0$.

مثال: أوجد الجذر التقريبي للدالة $f(x)=\ln(x)-x^2+2$ المعرفة على المجال $[0{,}1\ ,0{,}5]$ بدقة $\varepsilon=0{,}0001$.

الحل:

خلاصة الفصل الأول:

* طريقة التنصيف هي طريقة متقاربة بدون أي شرط، لكن من عيوبها البطء في الحصول على الحل بدقة كبيرة.
* طريقة النقطة الثابتة هي طريقة اسرع من طريقة التنصيف بشرط ان تحقق معايير التقارب
* طريقة نيوتن رافسون هي طريقة الأفضل من حيث السرعة وتسمح بالحصول على حلول أكثر دقة بأقل عدد من التكرار.