Université Abdelhafid Boussouf - Mila $2024 - 2025$
Institut des Mathématiques et informatique
Département des Mathématiques **Master 1 : MMTD**

Série no 1 : Introduction à la Combinatoire

Exercice 1. 1. *Montrez que dans toute suite de 10 nombres entiers distincts, il existe deux nombres dont la différence est divisible par 9.*

2. *Si $n+1$ nombres sont choisis parmi $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, montrez qu'il y a toujours deux nombres consécutifs.*

Exercice 2. *1. Combien de mots distincts peut-on former en réarrangeant les lettres du mot "COMBINATOIRE" ?*
2. Soit l'ensemble : $A = \{a, b, c, d\}$.

— *Combien y a-t-il de sous-ensembles de A de taille 2 ?*
— *Trouvez une bijection explicite entre l'ensemble des sous-ensembles de taille 2 et ceux de taille $|A| - 2$.*
— *En déduire une formule générale pour :*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{1}$$

Exercice 3. *Soit l'alphabet $W = \{a, b, c\}$. Considérons les mots formés sur cet alphabet.*

1. *Soient $u = aba$ et $v = bca$. Déterminez uv et vu. La concaténation est-elle commutative ? Justifiez votre réponse.*
2. *Calculez $(ab)^3$ et c^5.*
3. *Déduisez une règle générale pour w^k, où w est un mot quelconque et k un entier naturel.*
4. *Déterminez tous les facteurs de longueur 2 du mot $w = abcbac$.*
5. *Vérifiez si abc et acb sont des sous-mots de w.*

Exercice 4. *Soit la permutation :*

$$\sigma = (1\,3\,2)(4\,5) \in S_5. \tag{2}$$

1. *Décomposez σ en transpositions.*
2. *Montrez que toute permutation de S_n peut s'écrire comme produit d'au plus $n-1$ transpositions.*
3. *Combien de transpositions sont nécessaires pour écrire le cycle $(1\,2\,3\,4\,5)$?*

Exercice 5. 1. *Listez toutes les partitions de l'entier $n = 4$.*

2. *Calculez $P(5, 2)$ en utilisant la relation de récurrence :*

$$P(n,k) = P(n-1, k-1) + P(n-k, k). \tag{3}$$

3. *Utilisez la formule de Ramanujan pour estimer $P(10)$, puis comparez avec la valeur exacte.*

Exercice 6. *Soit la partition :*

$$\lambda = (3, 2, 1). \tag{4}$$

1. *Dessinez le diagramme de Ferrers de* λ *et son conjugué* $\tilde{\lambda}$.
2. *Appliquez la formule des équerres pour calculer le nombre de tableaux de Young standard de forme* λ.
3. *Construisez un tableau de Young semi-standard pour* λ *avec l'évaluation* $(2, 1, 1, 1, 1)$.

Solution exercice (3) **:**

1. **Concaténation** :
   — $uv = ababcba$, $vu = bcaaba$.
   — Comme $uv \neq vu$, la concaténation n'est pas commutative.
2. **Puissance d'un mot** :
   — $(ab)^3 = ababab$, $c^5 = ccccc$.
   — Règle générale : w^k consiste à répéter w, k fois consécutivement.
3. **Facteurs et sous-mots** :
   — Facteurs de longueur 2 de *abcbac* : {ab, bc, cb, ba, ac}.
   — *abc* est un sous-mot (lettres consécutives), mais *acb* ne l'est pas (ordre brisé).
4. **Mots miroirs et palindromes** :
   — Le miroir de *abcba* est *abcba*.
   — Comme $w = w^R$, *abcba* est un palindrome.

Solution exercice (1) **:**

Première question : Différence divisible par 9

Nous utilisons le **principe des tiroirs** (ou principe de Dirichlet).

- Considérons les restes possibles d'un entier lorsqu'on le divise par 9 : ils appartiennent à l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, 8\}$, soit 9 classes de congruence.
- Si nous choisissons 10 nombres distincts, il existe au moins deux nombres qui appartiennent à la même classe modulo 9 (par le principe des tiroirs).
- Par conséquent, la différence entre ces deux nombres est un multiple de 9.

Deuxième question : Existence de deux nombres consécutifs

Nous utilisons à nouveau le **principe des tiroirs**.

- Nous avons un ensemble de $2n$ nombres $\{1, 2, \ldots, 2n\}$.
- Nous choisissons $n+1$ nombres parmi ces $2n$.
- Si nous répartissons ces $2n$ nombres en n paires $(1, 2), (3, 4), \ldots, (2n-1, 2n)$, nous avons n groupes.
- En choisissant $n+1$ nombres, nous devons prendre au moins un élément de deux paires distinctes.
- Il y aura donc nécessairement au moins une paire de nombres consécutifs.

Solution exercice (4) **:**

Décomposition de σ en transpositions

Un cycle $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_k)$ peut être décomposé en transpositions comme suit :

$$(a_1\ a_2\ \ldots\ a_k) = (a_1\ a_k)(a_1\ a_{k-1})\ldots(a_1\ a_2). \tag{5}$$

Appliquons cela aux cycles de σ :

$$(1\ 3\ 2) = (1\ 2)(1\ 3),$$
$$(4\ 5) = (4\ 5).$$

Donc, σ s'écrit comme produit de transpositions :

$$\sigma = (1\,2)(1\,3)(4\,5). \tag{6}$$

Produit de transpositions pour toute permutation

Toute permutation dans S_n peut être écrite comme produit de cycles disjoints. Chaque cycle de longueur k peut être décomposé en $k-1$ transpositions. Comme toute permutation est composée d'au plus n cycles, la décomposition en transpositions ne dépasse jamais $n-1$.

Application : Décomposition du cycle $(1\,2\,3\,4\,5)$

Le cycle $(1\,2\,3\,4\,5)$ peut être décomposé comme :

$$(1\,2\,3\,4\,5) = (1\,5)(1\,4)(1\,3)(1\,2). \tag{7}$$

Ainsi, 4 transpositions sont nécessaires, ce qui est bien égal à $n-1=4$ pour $n=5$.
Solution exercice (2) **:**

Nombre de sous-ensembles de taille 2

Un sous-ensemble de taille 2 est un ensemble contenant exactement 2 éléments distincts de A. Le nombre de tels sous-ensembles est donné par le coefficient binomial :

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4\times 3}{2\times 1} = 6. \tag{8}$$

Les sous-ensembles de taille 2 sont :

$$\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}. \tag{9}$$

Bijection avec les sous-ensembles de taille $|A|-2$

L'ensemble A contient 4 éléments. Un sous-ensemble de taille $4-2=2$ contient exactement les éléments **non choisis** dans un sous-ensemble de taille 2.

Ainsi, on peut établir une bijection entre :

$$\{a,b\}\leftrightarrow\{c,d\},\quad \{a,c\}\leftrightarrow\{b,d\},\quad \{a,d\}\leftrightarrow\{b,c\}. \tag{10}$$

Chaque sous-ensemble de taille 2 est associé de manière unique à un sous-ensemble complémentaire de taille 2.

Formule Générale

De manière générale, pour un ensemble de n éléments, le nombre de façons de choisir k éléments est égal au nombre de façons de choisir les $n-k$ éléments restants :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}. \tag{11}$$

Cette propriété montre la **symétrie des coefficients binomiaux** et est fondamentale en combinatoire.

Solution exercice (5) **:**

Liste des partitions de $n = 4$

Les partitions de 4 sont :

$$(4), \quad (3,1), \quad (2,2), \quad (2,1,1), \quad (1,1,1,1). \tag{12}$$

Ainsi, $P(4) = 5$.

Calcul de $P(5,2)$ par récurrence

Utilisons la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} P(5,2) &= P(4,1) + P(3,2) \\ &= 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Estimation de $P(10)$ avec la formule de Ramanujan

La formule asymptotique de Ramanujan pour le nombre de partitions est :

$$P(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right). \tag{13}$$

Pour $n = 10$:

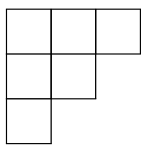
$$\begin{aligned} P(10) &\approx \frac{1}{40\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{20}{3}}\right) \\ &\approx \frac{1}{40\sqrt{3}} \exp(5.13) \\ &\approx \frac{1}{40\sqrt{3}} \times 169.6 \\ &\approx 42.4. \end{aligned}$$

La valeur exacte est $P(10) = 42$, ce qui montre que la formule donne une bonne estimation.

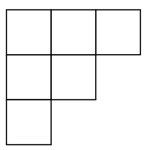
Solution exercice (6) **:**

Diagramme de Ferrers et Conjugué

Le diagramme de Ferrers de $\lambda = (3,2,1)$ est :



Son conjugué $\tilde{\lambda} = (3,2,1)$ est obtenu en échangeant les lignes et les colonnes :



Nombre de Tableaux de Young Standard

Le nombre de tableaux de Young standard est donné par la **formule des équerres** :

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j)\in\lambda} h_{i,j}}, \tag{14}$$

où $h_{i,j}$ est la longueur du bras droit + la longueur de la jambe inférieure + 1 pour chaque case (i,j).
Calculons les hauteurs des cases :

5	3	1
3	1	
1		

Nous avons :

$$f^{(3,2,1)} = \frac{6!}{5\times 3\times 1\times 3\times 1\times 1} = \frac{720}{45} = 16. \tag{15}$$

Tableau de Young Semi-Standard

Un tableau semi-standard de λ avec l'évaluation $(2,1,1,1,1)$ est un remplissage où chaque ligne est croissante et chaque colonne est strictement croissante.

1	1	2
3	4	
5		