

2. Formes bilinéaires

Dans tout ce chapitre E , F et G sont des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

2.1 Formes bilinéaires

Définition 2.1.1 L'application $f : E \times F \longrightarrow G$ est dite **bilinéaire** si :

$$\begin{aligned}f(x_1 + x_2, y) &= f(x_1, y) + f(x_2, y) \\f(\alpha x, y) &= \alpha f(x, y) \\f(x, y_1 + y_2) &= f(x, y_1) + f(x, y_2) \\f(x, \alpha y) &= \alpha f(x, y)\end{aligned}$$

$\forall x, x_1, x_2 \in E, y, y_1, y_2 \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Si $G = \mathbb{K}$ f est dite **forme bilinéaire**.

Définition 2.1.2 L'application $f : E \times F \longrightarrow G$ est dite bilinéaire si :

i) Pour tout $x \in E$, (x fixé), l'application,

$$\begin{aligned}f_x : F &\longrightarrow G \\y &\longmapsto f(x, y)\end{aligned}$$

est une forme linéaire sur F .

ii) Pour tout $y \in F$, (y fixé), l'application,

$$\begin{aligned}f_y : E &\longrightarrow G \\x &\longmapsto f(x, y)\end{aligned}$$

est une forme linéaire sur E .

■ Exemple 2.1

1. L'application

$$\begin{aligned}f_0 : E \times F &\longrightarrow \mathbb{K} \\(x, y) &\longmapsto 0_{\mathbb{K}}\end{aligned}$$

est une forme bilinéaire.

2. L'application

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire.

3. Soit $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continue}\}$. L'application

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire. ■

2.1.1 L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E \times F, \mathbb{K})$

Proposition 2.1.1 L'ensemble de toutes les formes bilinéaires de $E \times F$ dans $\mathbb{K}$, noté $\mathcal{L}(E \times F, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Démonstration.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{L}(E \times F, \mathbb{K})$

1. a) La forme bilinéaire

$$\begin{aligned} f_0: E \times F &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto 0_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

est l'élément neutre de $\mathcal{L}(E \times F, \mathbb{K})$.

b) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E \times F, \mathbb{K})$,

$$(f + g) + h = f + (g + h),$$

donc $+$ est associatif.

c) Soit $f \in \mathcal{L}(E \times F, \mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned} -f: E \times F &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto -f(x, y) \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire vérifié

$$f + (-f) = 0_{\mathcal{L}(E \times F, \mathbb{K})}$$

donc $+$ est symétrisable.

b) Soit $f, g \in \mathcal{L}(E \times F, \mathbb{K})$, on a

$$f + g = g + f$$

donc $+$ est abélien.

Par conséquent $(\mathcal{L}(E \times F, \mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien.

2. $(\alpha\beta).g = \alpha.(\beta g)$.

3. $(\alpha + \beta).f = \alpha.f + \beta.f$.

4. $\alpha.(f + g) = \alpha.f + \alpha.g$.

5. $1_{\mathbb{K}}.f = f$.

Donc $\mathcal{L}(E \times F, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. ■

2.1.2 Matrice d'une forme bilinéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies sur le même corps $\mathbb{K}$, $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E et $B' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p\}$ une base de F .

Définition 2.1.3 Soit $f \in \mathcal{L}(E \times F, \mathbb{K})$. La **matrice associée à f** par rapport à B et B' est la matrice de type (n, p) définie par

$$a_{ij} = f(e_i, \varepsilon_j) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, p.$$

c'est à dir

$$M = \begin{pmatrix} f(e_1, \varepsilon_1) & f(e_1, \varepsilon_2) & \dots & f(e_1, \varepsilon_p) \\ f(e_2, \varepsilon_1) & f(e_2, \varepsilon_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f(e_n, \varepsilon_1) & f(e_n, \varepsilon_2) & \dots & f(e_n, \varepsilon_p) \end{pmatrix}$$

■ Exemple 2.2

Soit la forme bilinéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2)) \longmapsto (x_1 + x_2 + x_3)y_1 + (x_1 + x_2 + x_3)y_2$$

et soit $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = \{\varepsilon_1 = (1, 0), \varepsilon_2 = (1, 1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$.

La matrice associée à f par rapport à B et B' est

$$M = \begin{pmatrix} f(e_1, \varepsilon_1) & f(e_1, \varepsilon_2) \\ f(e_2, \varepsilon_1) & f(e_2, \varepsilon_2) \\ f(e_3, \varepsilon_1) & f(e_3, \varepsilon_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

■

2.1.3 Forme bilinéaire associée à une matrice

Définition 2.1.4 Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application

$$f : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(X, Y) \longmapsto X^t M Y$$

$$\text{où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

est une forme bilinéaire dite **la forme bilinéaire associée à M** .

■ **Exemple 2.3** Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

La forme bilinéaire associée à A est

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3)) \longmapsto f((x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3))$$

avec

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3)) &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1y_1 + (3x_1 - 2x_2)y_2 + (x_1 + 4x_2)y_3. \end{aligned}$$

■

2.1.4 Changement de base

Proposition 2.1.2 Soient $f \in \mathcal{L}(E \times F, \mathbb{K})$, $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E et $B' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_p\}$ une base de F et M la matrice associée à f par rapport à B et B' . Soient maintenant $B_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ une autre base de E et $B'_1 = \{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_p\}$ une autre base de F et N la matrice associée à f par rapport à B_1 et B'_1 . Donc

$$N = {}^t PMQ$$

avec

P est la matrice de passage de B à B_1 .

Q est la matrice de passage de B' à B'_1 .

Démonstration. En utilisant l'écriture matricielle par rapport aux bases B, B' et B_1, B'_1 , on aura

$$\forall (X, Y) \in E \times F : f(X, Y) = {}^t XMY = {}^t X'NY'$$

$$\text{avec } X = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i \varepsilon_i \text{ et } Y = \sum_{i=1}^p y_i e'_i = \sum_{i=1}^p y'_i \varepsilon'_i.$$

Soit P la matrice de passage de B à B_1 , donc $X = PX'$

Soit Q la matrice de passage de B' à B'_1 , donc $Y = QY'$. Par suite, on aura

$$\begin{aligned} {}^t XMY &= {}^t (PX')M(QY') \\ &= {}^t X' {}^t PMQY \\ &= {}^t X' ({}^t PMQ)Y. \end{aligned}$$

Donc $\forall X' \in \mathbb{K}^n, Y' \in \mathbb{K}^p, {}^t X'NY' = {}^t X'({}^t PMQ)Y$. Alors $N = {}^t PMQ$. ■

2.2 Formes bilinéaires symétriques

Définition 2.2.1 Soit $f \in \mathcal{L}(E \times E, \mathbb{K})$.

- f est dite **symétrique** si

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad f(x, y) = f(y, x).$$

- f est dite **anti-symétrique** si

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad f(x, y) = -f(y, x).$$

- f est dite **alternée** si

$$\forall x \in E, \quad f(x, x) = 0.$$

■ Exemple 2.4

1. Soit la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt \end{aligned}$$

Soit $f, g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(g, f) &= \int_0^1 g(t)f(t)dt \\ &= \int_0^1 f(t)g(t)dt \\ &= \varphi(f, g). \end{aligned}$$

Donc φ est symétrique.

2. Soit la forme bilinéaire

$$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \longmapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Soit $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} f((y_1, y_2), (x_1, x_2)) &= y_1 x_2 - y_2 x_1 \\ &= -(x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &= -f((x_1, x_2), (y_1, y_2)). \end{aligned}$$

Donc f est anti-symétrique. D'autre part on a

$$f((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0.$$

Donc f est alternée. ■

Proposition 2.2.1

- i) L'ensemble des formes bilinéaires symétriques, noté $\mathcal{S}(E \times E, \mathbb{K})$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E \times E, \mathbb{K})$.
- ii) L'ensemble des formes bilinéaires anti-symétriques, noté $\mathcal{A}(E \times E, \mathbb{K})$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E \times E, \mathbb{K})$.

Démonstration.

i) a) On a $f_0(x, y) = f_0(y, x) = 0_{\mathbb{K}}$ donc

$$f_0 \in \mathcal{S}(E \times E, \mathbb{K}). \quad (2.1)$$

b) Soient $f, g \in \mathcal{S}(E \times E, \mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)(x, y) &= \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) \\ &= \alpha f(y, x) + \beta g(y, x) \\ &= (\alpha f + \beta g)(y, x). \end{aligned}$$

Donc

$$\alpha.f + \beta.g \in \mathcal{S}(E \times E, \mathbb{K}) \quad (2.2)$$

De (2.1) et (2.2) $\mathcal{S}(E \times E, \mathbb{K})$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E \times E, \mathbb{K})$.

ii) a) On a $f_0(x, y) = -f_0(y, x) = 0_{\mathbb{K}}$ donc

$$f_0 \in \mathcal{A}(E \times E, \mathbb{K}). \quad (2.3)$$

b) Soient $f, g \in \mathcal{A}(E \times E, \mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)(x, y) &= \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) \\ &= -\alpha f(y, x) - \beta g(y, x) \\ &= -(\alpha f + \beta g)(y, x). \end{aligned}$$

Donc

$$\alpha.f + \beta.g \in \mathcal{A}(E \times E, \mathbb{K}) \quad (2.4)$$

De (2.3) et (2.4) $\mathcal{A}(E \times E, \mathbb{K})$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E \times E, \mathbb{K})$. ■

Proposition 2.2.2 On a

$$\mathcal{L}(E \times E, \mathbb{K}) = \mathcal{S}(E \times E, \mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}(E \times E, \mathbb{K}).$$

Démonstration.

i) Soit $f \in \mathcal{S}(E \times E, \mathbb{K}) \cap \mathcal{A}(E \times E, \mathbb{K})$ donc

$$f(x, y) = f(y, x), \quad \forall x, y \in E$$

$$f(x, y) = -f(y, x), \quad \forall x, y \in E$$

D'où $f(x, y) = 0, \quad \forall x, y \in E$, par conséquent

$$\mathcal{S}(E \times E, \mathbb{K}) \cap \mathcal{A}(E \times E, \mathbb{K}) = \{0_E\} \quad (2.5)$$

ii) On a

$$\mathcal{S}(E \times E, \mathbb{K}) + \mathcal{A}(E \times E, \mathbb{K}) \subset \mathcal{L}(E \times E, \mathbb{K}).$$

D'autre part, soit $f \in \mathcal{L}(E \times E, \mathbb{K})$,

$$f(x, y) = \underbrace{\frac{1}{2}(f(x, y) + f(y, x))}_{f_1(x, y)} + \underbrace{\frac{1}{2}(f(x, y) - f(y, x))}_{f_2(x, y)}$$

on a $f_1 \in \mathcal{S}(E \times E, \mathbb{K})$ et $f_2 \in \mathcal{A}(E \times E, \mathbb{K})$, Donc

$$\mathcal{L}(E \times E, \mathbb{K}) \subset \mathcal{S}(E \times E, \mathbb{K}) + \mathcal{A}(E \times E, \mathbb{K})$$

D'où

$$\mathcal{L}(E \times E, \mathbb{K}) = \mathcal{S}(E \times E, \mathbb{K}) + \mathcal{A}(E \times E, \mathbb{K}) \quad (2.6)$$

De (2.5) et (2.6) on aura

$$\mathcal{L}(E \times E, \mathbb{K}) = \mathcal{S}(E \times E, \mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}(E \times E, \mathbb{K}).$$

■

2.2.1 Noyau d'une formes bilinéaire symétrique

Définition 2.2.2 Soit $f \in \mathcal{L}(E \times E, \mathbb{K})$. Le **noyau** de f , noté $\text{Ann}(f)$, est définie par

$$\begin{aligned} \text{Ann}(f) &= \{x \in E, \forall y \in E : f(x, y) = 0\}, \\ &= \{y \in E, \forall x \in E : f(x, y) = 0\}. \end{aligned}$$

2.2.2 Formes bilinéaires symétriques non dégénérées

Définition 2.2.3 Soit $f \in \mathcal{L}(E \times E, \mathbb{K})$. f est dite **non dégénérées** si $\text{Ann}(f) = \{0_E\}$.

■ Exemple 2.5

1. Soit la forme bilinéaire symétrique

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &\longmapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{aligned}$$

On a

$$\text{Ann}(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0\},$$

On a

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0 \quad \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Pour $(y_1, y_2) = (1, 0)$ on obtient $x_1 = 0$.
- Pour $(y_1, y_2) = (0, 1)$ on obtient $x_2 = 0$.

Donc

$$\text{Ann}(f) = \{(0, 0)\}$$

Par conséquent f est non dégénérée.

2. Soit la forme bilinéaire symétrique

$$g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \longmapsto (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$$

On a

$$\text{Ann}(g) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0\},$$

On a

$$g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0 \quad \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Pour $(y_1, y_2) \neq (0, 0)$ on obtient $x_1 = -x_2$.

Donc

$$\text{Ann}(g) = \{(x_1, -x_1), x_1 \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -1) \rangle.$$

On a $\text{Ann}(g) \neq \{(0, 0)\}$ Par conséquent g est dégénérée. ■

Proposition 2.2.3 Soit $f \in \mathcal{L}(E \times E, \mathbb{K})$. On considère l'application $\Phi : E \rightarrow E^*$ définie par :

$$\forall y \in E, \Phi(y) = \varphi_y, \text{ o } \forall x \in E, \varphi_y(x) = f(x, y).$$

Alors Φ est injective si et seulement si f est non dégénérée.

Démonstration. On a Φ est linéaire et

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{x \in E, \Phi(x) = 0\} \\ &= \{x \in E, \varphi_y(x) = 0, \forall y \in E\} \\ &= \{x \in E, f(x, y) = 0, \forall y \in E\} = \text{Ann}(f). \end{aligned}$$

On a Φ est injective donc $\text{ker } \Phi = \{0_E\} = \text{Ann}(f)$, par conséquent f est non dégénérée. ■

Corollaire 2.2.4 Soient $f \in \mathcal{L}(E \times E, \mathbb{K})$, E de dimension finie et B une base de E et A la matrice de f par rapport à la base B . Alors

$$f \text{ est non dégénérée} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

Démonstration. considérons l'application $\Phi : E \rightarrow E^*$ définie par :

$$\forall y \in E, \Phi(y) = \varphi_y, \text{ o } \forall x \in E, \varphi_y(x) = f(x, y).$$

Posons $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E , et $B^* = \{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$ la base duale de B .

Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de ϕ par rapport aux bases B et B^* , alors on a

$$\forall j = 1, 2, \dots, n; \Phi(e_j) = \sum_{k=1}^n m_{kj} e_k^*$$

Donc pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$f(e_i, e_j) = \Phi(e_i)(e_j) = \sum_{k=1}^n m_{kj} e_k^*(e_i) = m_{ij}, \quad \text{car } e_k^*(e_i) = \delta_{ik}.$$

On en déduit donc que $M = A$. Ainsi, on aura,

$$\begin{aligned}
 f \text{ est non dgnre} &\Leftrightarrow \Phi \text{ est injective (Proposition(2.2.3))} \\
 &\Leftrightarrow \Phi \text{ est bejective (car } \dim E = \dim E^*) \\
 &\Leftrightarrow \det(M) \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 (\text{car } M = A).
 \end{aligned}$$

■

2.3 Orthogonalité

Définition 2.3.1 Soit $f \in \mathcal{L}(E \times E, \mathbb{K})$.

On dit que deux vecteurs x et y de E sont **orthogonaux**, si $f(x, y) = 0$.

Définition 2.3.2 Soient $f \in \mathcal{L}(E \times E, \mathbb{K})$ et A une partie non vide de E . On définit l'**orthogonale** de A , par rapport à la forme bilinéaire f , noté $A^\perp$, par

$$A^\perp = \{x \in E : f(x, y) = 0, \forall y \in A\}.$$

■ **Exemple 2.6** Soit $f \in \mathcal{L}(E \times E, \mathbb{K})$.

1.

$$E^\perp = \{x \in E : f(x, y) = 0, \forall y \in E\} = \text{Ann}(f).$$

2.

$$\{0_E\}^\perp = \{x \in E : f(x, 0) = 0\} = E.$$

■

2.3.1 Bases orthogonales

Définition 2.3.3 Soient $f \in \mathcal{L}(E \times E, \mathbb{K})$ et E de dimznsion finie. On dit que une base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est **orthogonale** si

$$f(e_i, e_j) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j.$$