

# Chapitre4

## Résolution des équations différentielle ordinaire

### 4.1 Introduction :

Les équations différentielles sont utilisées dans la modélisation mathématique des phénomènes physiques. Une équation différentielle ordinaire (ODE, *Ordinary Differential Equation*) est une équation reliant une fonction d'une variable réelle et ses dérivées, c'est à dire de la forme suivante :

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$$

où  $y$  est la fonction inconnue,  $y'$  sa dérivée et  $t$  la variable réelle.

Il existe deux types de problèmes différentiels :

- Conditions initiales (ou problème de **Cauchy**)

données pour une seule valeur  $t_0$  de  $t$ , par exemple  $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$

- Conditions **aux limites** (Problème **aux limites**)

données pour des valeurs distinctes de la variable indépendante  $t$  (par exemple les deux conditions sont alors partagées entre les deux extrémités de l'intervalle:  $y(0)=y_0$  et  $y(T) = y_T$ ). Ce deuxième type de problème correspond à des situations physiques complètement différentes et cela se traduit par des méthodes de résolution numériques complètement différentes.

## 4.2 Le problème de Cauchy :

Soit  $f$  une fonction définie de  $[t_0, T] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Le problème de Cauchy consiste à trouver une fonction  $y : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  solution de l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = f(t, y(t)), t \in [t_0, T] \text{ avec } y(t_0) = y_0$$

La condition  $y(t_0) = y_0$  est une condition initiale ou la condition de Cauchy. Si on suppose que la fonction  $f$  est continue par rapport aux deux variables  $t, y$  et que  $f$  est uniformément Lipschitzienne par rapport à  $y$  c'est à dire que

$$\exists L > 0, \forall t \in [t_0, T], \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Alors le problème de Cauchy admet une solution unique  $y \in C^1([t_0, T])$

Le problème de Cauchy est un problème d'évolution, c'est à dire à partir de la condition initiale, on peut calculer la solution à l'instant  $t$ .

### Schéma à un pas (méthode à un pas)

Si  $y_{n+1}$  est une fonction de  $t_n$  et  $y_n$  uniquement. Le schéma d' Euler est un schéma à un pas.

Un **Schéma à deux pas** si  $y_{n+1}$  est une fonction de  $(t_n, y_n)$  et de  $(t_{n-1}, y_{n-1})$  uniquement.

Un **Schéma à k pas** si  $y_{n+1}$  est une fonction de  $(t_n, y_n), (t_{n-1}, y_{n-1}), \dots, (t_{n-(k-1)}, y_{n-(k-1)})$ .

Dans les méthodes à un pas, le calcul de  $y_{n+1}$  fait intervenir  $t_n, y_n, h$  que l'on peut écrire sous la forme:

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(y_n, t_n, h) \quad (4.1)$$

$$\Phi(y_n, t_n, h) = \sum_{i=1}^q \gamma_i k_i$$

tel que

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(t_n + ah, y_n + bk_1)$$

$$k_3 = hf(t_n + bh, y_n + ck_2)$$

.

.

$$y_{n+1} = y_n + R_1 k_1 + R_2 k_2 + \dots \dots \dots$$

La méthode la plus célèbre est celle d'Euler.

### 4.3 Méthode d'Euler :

Dans cette méthode la fonction  $\Phi(y_n, t_n, h)$  dans la relation (4.1) est en fonction de  $t$  et  $y$  ( $\Phi(y_n, t_n, h) = f(t, y)$ ).

On donne une subdivision de  $I = [t_0, T]$  en  $n$  intervalles de pas  $h$ .

Tel que  $h = t_{n+1} - t_n$ . On notera par  $y_n$  une approximation de  $y(t_n)$ :

Dans le problème de Cauchy, pour  $t = t_n$  on a

$$y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$$

On approche la dérivée  $y'(t_n)$  en utilisant des schémas de dérivation numérique.

#### 4.3.1 Schéma d'Euler:

La méthode d'Euler consiste à approcher  $y'(t_n)$  par la formule de Taylor comme suit :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + E(h^2)$$

$$\text{Soit } y'(t_n) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} + E(h^2) = f(t_n, y(t_n))$$

avec  $E(h^2)$  est le reste (considéré négligeable)

et  $y_n$  une approximation de  $y(t_n)$  ( $y_n \approx y(t_n)$ ), le schéma d'Euler s'écrit

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad \text{avec } y(t_0) = y_0.$$

### Exemple

Soit l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La solution exacte (la solution analytique) de cette équation est donnée par

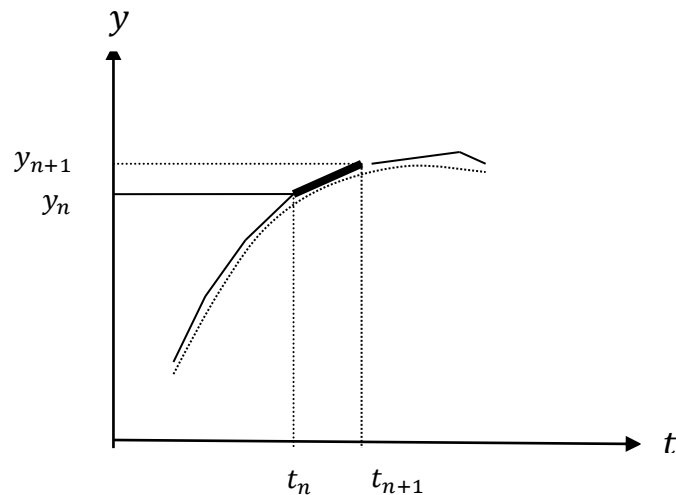
$$y_{\text{exacte}} = e^t$$

$t$	$y$ pour $h=0.2$	$y$ pour $h=0.1$	$y_{\text{exacte}}$
1	2.4883	2.59374	2.71828
2	6.19174	6.7275	7.38905
3	15.407	17.4494	20.0555
4	38.3376	45.2593	54.598

### 4.3.2 Interprétation géométrique :

Le point  $(t_{n+1}, y_{n+1})$  est sur la droite contenant  $(t_n, y_n)$  et de pente

$f(t_n, y_n)$ , ou  $f(t_n, y_n)$  est la pente de la tangente à la courbe. Alors le sens géométrique de la relation d'Euler est donc d'approximer la courbe de  $y(t)$  par sa tangente en  $(t_n, y_n)$ .



**Fig 4.1** Représentation graphique de la méthode d'Euler.

#### Remarque :

La méthode d'Euler converge très lentement, l'erreur est mal contrôlée. On cherche donc des algorithmes plus efficaces.

**4.4 Méthode d'Euler améliorée** (méthode de Heun) ou encore méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 est une autre méthode d'ordre 2. Où on peut améliorer les résultats obtenus avec la méthode d'Euler par la formule suivante :

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_{n+1}^*\right)$$

$$y_{n+1}^* = y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)$$

Géométriquement, la méthode consiste à remplacer dans la méthode d'Euler la pente de la tangente en  $(t_n, y_n)$  par la valeur corrigée au milieu de l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ .

**Exemple :**

Résoudre le problème de Cauchy précédant par la méthode d'Euler améliorée en prenant un pas d'intégration  $h=0.2$ .

On a :

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_{n+1}^*\right)$$

$$y_{n+1}^* = y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)$$

Par remplacement dans la formule

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)\right)$$

Avec :  $f(t, y) = y' = y$  et  $y(0) = 1$

on obtient :

$$y_1 = y(t = 0.2) = 1.22$$

$$y_2 = y(t = 0.4) = 1.4884$$

$$y_3 = y(t = 0.6) = 1.8115$$

$$y_4 = y(t = 0.8) = 2.7022$$

**4.5 Méthodes de Runge- Kutta**

Pour calculer une approximation de la solution à l'instant  $t_{n+1}$  en fonction de

celle de  $t_n$ , la méthode de Runge-Kutta utilise  $q$  solutions intermédiaires en fonction de  $y_n$ . La méthode de Runge-Kutta de rang  $q$  sous sa forme générale s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(y_n, t_n, h)$$

où  $\Phi$  prend la forme particulière suivante

$$\Phi(y_n, t_n, h) = \sum_{i=1}^q \gamma_i k_i$$

On utilise le développement de Taylor .

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \frac{h^3}{6}y'''(t_n) + \dots$$

Et par comparaison avec la formule (4.1) on trouve les formules de Runge-Kutta (d'ordre 2 ( $K_1$  et  $K_2$ ), d'ordre 3 ( $K_1, K_2$  et  $K_3$ ),.....)

#### 4.5.1 Runge-Kutta d'ordre 4

Par le développement de Taylor au 4<sup>ème</sup> degré on arrive à la formule de

Runge-Kutta d'ordre 4 suivante :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

avec

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3)$$

#### Exemple

Résoudre le problème de Cauchy précédent par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 en prenant un pas d'intégration  $h=0.2$ .

On a

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

avec

$$k_1 = hf(t_n, y_n) = 0.2$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) = 0.22$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) = 0.222$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3) = 0.2444$$

$$\mathbf{y_1 = y(t = 0.2) = 1.2214}$$

$$k_1 = 0.2442$$

$$k_2 = 0.2687$$

$$k_3 = 0.2711$$

$$k_4 = 0.2985$$

$$\mathbf{y_2 = y(t = 0.4) = 1.4918}$$

$$k_1 = 0.2983$$

$$k_2 = 0.3281$$

$$k_3 = 0.3311$$

$$k_4 = 0.3645$$

$$\mathbf{y_3 = y(t = 0.6) = 1.8220}$$

$$k_1 = 0.3764$$

$$k_2 = 0.4020$$

$$k_3 = 0.4046$$

$$k_4 = 0.4453$$

$$\mathbf{y_4 = y(t = 0.8) = 2.2278}$$

$$k_1 = 0.4455$$

$$k_2 = 0.4901$$

$$k_3 = 0.4945$$



$$k_4 = 0.5444$$

$$y_5 = y(t = 1) = 2.72099$$

**Remarque :**

On observe que la solution obtenue par Runge- Kutta d'ordre 4 est plus proche à la solution exacte que les autres méthodes.