

Matière : *Algèbre 4*

Responsable : *Y. Halim*

SÉRIE DE TD N° 1

Exercice 1 :

Soit

$$E = \mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

On considère :

$$F = \{P \in E : P'(0) = 0\}.$$

1. Justifier que F est un hyperplan de E , en déduire sa dimension.
2. Donner tous les supplémentaires de F dans E .

Exercice 2 :

Déterminer la forme linéaire f définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$f(1, 1, 1) = 0, f(2, 0, 1) = 1, f(1, 2, 3) = 4.$$

Donner une base du $\ker f$ le noyau de f .

Exercice 3 :

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1, 1), v_4 = (0, 0, 0, 1).$$

1. Montrer que $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer la base dual de B .

Exercice 4 :(Interrogation 2023)

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les formes linéaires sur $\mathbb{R}_2[X]$ définies par

$$\varphi_1(P) = P(0), \quad \varphi_2(P) = P'(1), \quad \varphi_3(P) = \int_0^1 P(t)dt.$$

1. Montrer que la famille $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est une base du dual de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer sa base antéduale.

Exercice 5 :

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ On considère la famille $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, f_2\}$ d'éléments de E^* définis par, pour $j = 0, 1, 2$

$$\forall p \in E \quad f_j(P) = P(j).$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E^* .
2. Déterminer la base antéduale B de $\mathcal{F}$.