التوزيعات الاحتمالية المتصلة

أولا: التوزيع الطبيعي

تمهيد:

يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية في الاحصاء لأن:

- كثير من الظواهر التي نصادفها في التجارب العملية تتوزع توزيعا طبيعيا.
- يستخدم هذا التوزيع كتقريب للعديد من التوزيعات الاحتمالية متقطعة كانت أم مستمرة تحت شروط معينة، وبالتالي يعتبر كتقدير أحسن لهذه التوزيعات، ويقلل من معاناة العملية الحسابية التي يتطلبها التوزيع الأصلي بعد تعويضه بالطبيعي.
- له أهمية كبيرة في الاستقراء الاحصائي (إختبارات الفروض، مجالات الثقة وغيرها) وفي توزيعات المعاينة التي تتبع التوزيع الطبيعي تحت شروط محددة (نظرية النهاية المركزية).
- قيم هذا التوزيع مجدولة، وبالتالي يسهل حساب الاحتمالات.

ملاحظة: التوزيع الطبيعي توزيع نظري لكون مثلويته الرياضية لا يمكن مصادفتها بالتمام في الطبيعة.

1. دالة الكثافة الاحتمالية:

يرمز للتوزيع الطبيعي ذو المعلمتين δ و μ بالرمز:

$$X \backsim N(\mu; \delta^2)$$

وتعرف دالة كثافته الاحتمالية كما يلي:

$$\forall x \in \Re: \qquad f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}$$

حيث:

X: المتغير العشوائي الطبيعي، وهو معرف على المجال $]-\infty, +\infty[$.

μ: الوسط الحسابي، وهو مقدار ثابت حقيقي يعكس متوسط المجتمع (المتوسط الحسابي للمجتمع).

δ: مقدار ثابت حقيقي موجب، وهو الانحراف المعياري لتوزيع المجتمع.

ملاحظة:

إن التوزيع الطبيعي ليس توزيع وحيد ولكنه عائلة من التوزيعات، ويتحدد شكل التوزيع تماما بمجرد معرفة معلميته μ و δ لذلك يعرف بدلالتهما.

ويمكننا التحقق من أن f تحقق شروط دالة كثافة احتمالية، وذلك استنادا إلى التكامل الشهير I_1 وايجاد التكاملين I_2 و I_3 كما هو مبين من خلال ما يلي:

$$\mathrm{I}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \sqrt{2\pi}$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} -y e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$= -\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = 0$$

$$\mathrm{I}_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$= -y\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$\mathrm{I}_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \sqrt{2\pi}$$

والآن يمكن التحقق من أن f هي دالة كثافة احتمالية:

$$\forall \mathrm{x} \in \Re : \mathrm{f(x)} \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{I}_1 = 1$$

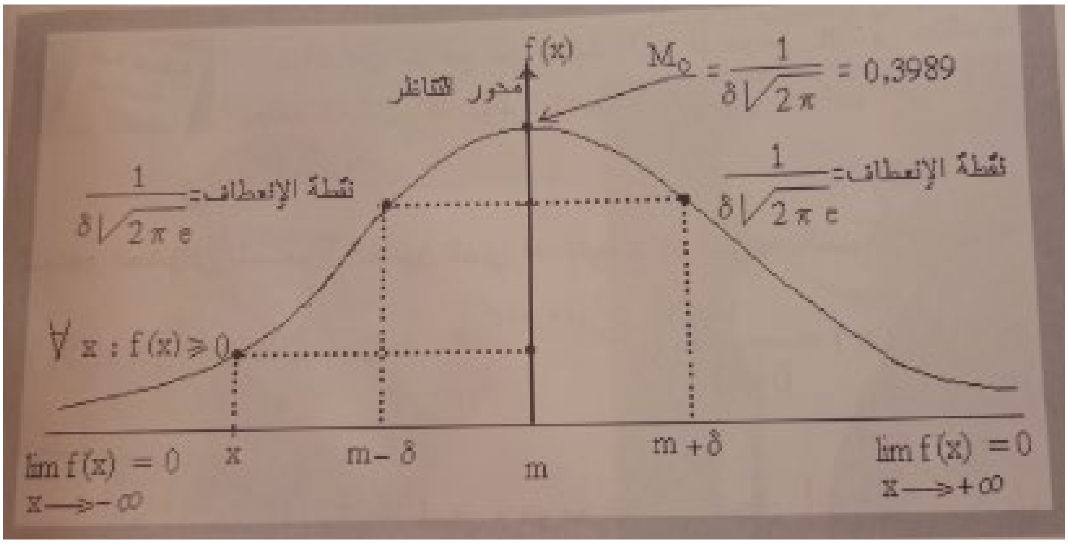
حيث:

$$y = \frac{x-\mu}{\delta}$$

$$\Rightarrow x = \delta y + \mu$$

$$\Rightarrow dx = \delta dy$$

أما فيما يخص التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي فيتضح من خلال المنحنى الآتي الممثل لتابع الكثافة أنه ذو شكل جرسي، كما يتضح من خلال التمثيل البياني بعض خصائص التوزيع الطبيعي:



2. تابع التوزيع:

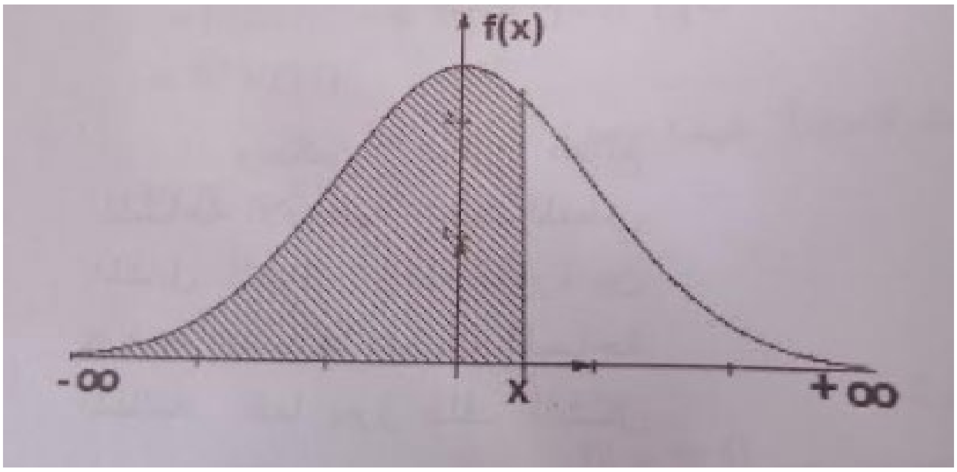
نعرف أن تابع التوزيع $F(x)$ لمتغير عشوائي مستمر X ويساوي إلى:

$$F(x) = p(X \leq x)$$

إذا كان X متغير عشوائي طبيعي فإن التوزيع لهذا المتغير يساوي إلى:

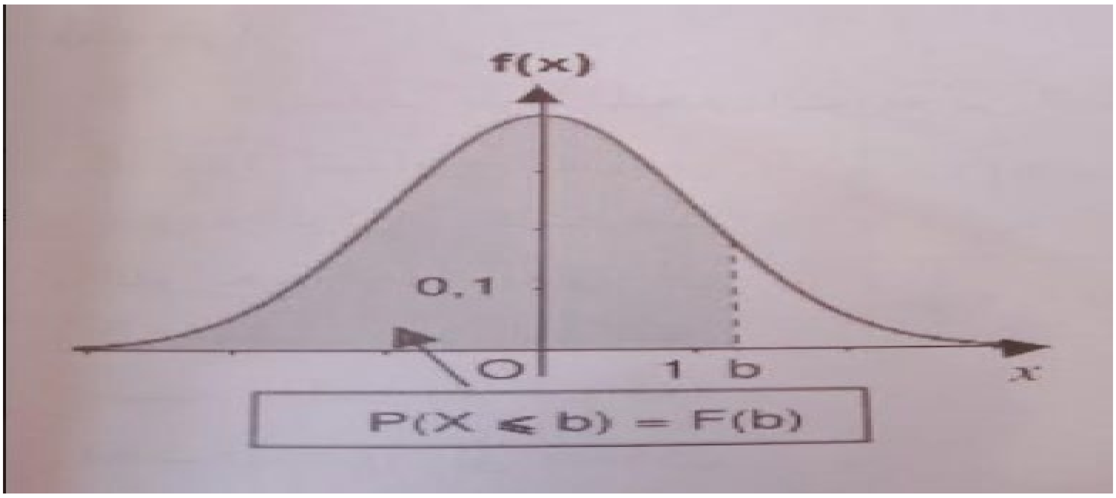
$$F(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2} dx$$

ويعكس هذا التابع المساحة الاجمالية تحت المنحنى المقابل لـ $F(x)$ والمحصورة بين $-\infty$ و X وهذا ما تعكسه المساحة المظللة كما يبرز ذلك الشكل المقابل:

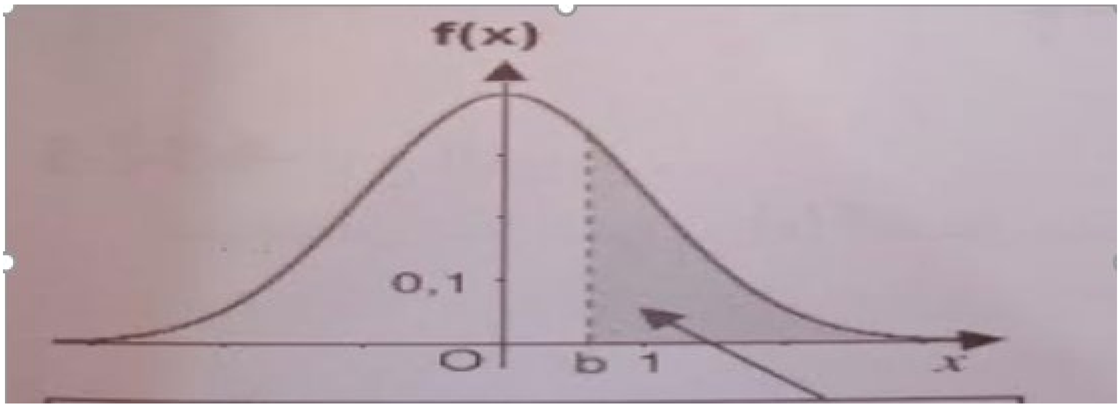


4. حالات قياسية (منهجية الحساب):

لنحسب احتمال أن يأخذ المتغير X قيمة أقل أو تساوي b بحيث أن b موجب تماما، هذا ما يعكسه الشكل البياني والممثل بالمساحة المضللة.



وباعتماد مفهوم التمام يمكننا استخلاص القيمة الاحتمالية التي تغطيها المساحة التي تقع على يسار النقطة b وهو الحادث المتمم، وهذا مايعكسه الشكل البياني الآتي:

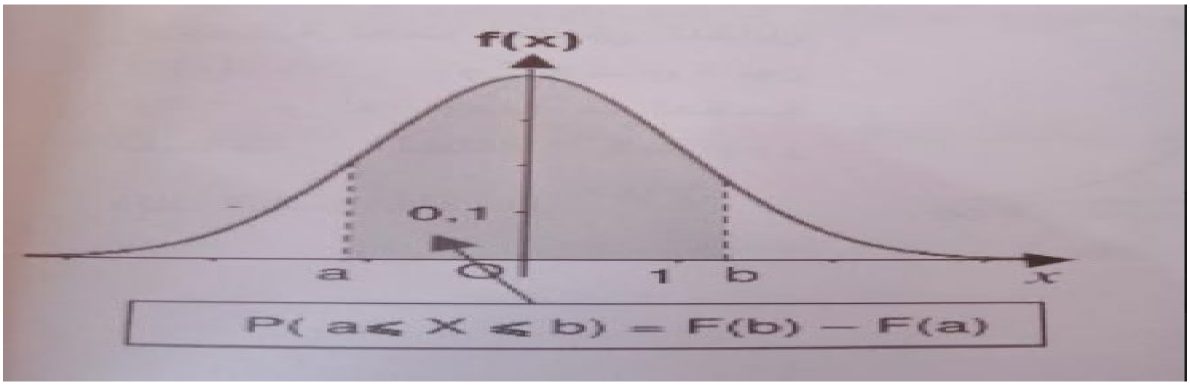


ولحساب المساحة المحصورة بين نقطتين a و b بحيث a أقل أو يساوي b

يعني إيجاد احتمال أن يتردد المتغير المفروض بين هاتين النقطتين، أي أن:

$$p(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2} dx$$

ويعكس هذا التابع المساحة الإجمالية تحت المنحنى المقابل لـ $F(x)$ والمحصورة بين a و b، وهذا ما تعكسه المساحة المظللة كما يبرز ذلك الشكل الموالي:



4. المميزات العددية:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}dx$$

نضع التحويل:

$$y=\frac{x-\mu}{\delta}$$

$$\Rightarrow x=\delta y+\mu$$

$$\Rightarrow dx=\delta dy$$

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\delta y+\mu)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{y}^2}dy$$

$$=\frac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{y}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{y}^2}dy+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

$$=\frac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{I}_2+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}I_3$$

$$E(X)=\mu$$

التباين:

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}dx$$

نضع التحويل:

$$y=\frac{x-\mu}{\delta}$$

$$\Rightarrow x = \delta y + \mu$$

$$\Rightarrow dx = \delta dy$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta y + \mu)^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{y}^2} dy$$

$$E(X^2) = \frac{\delta^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{y}^2} dy + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy + \frac{2\delta\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$E(X^2) = \delta^2 + \mu^2$$

$$\mathrm{V(X)} = \delta^2$$

ثانيا: التوزيع الطبيعي المعياري

1. دالة الكثافة الاحتمالية:

نقول عن المتغير العشوائي Z المستمر أنه يتبع التوزيع الطبيعي المعياري إذا كانت دالة كثافة احتماله φ تحقق:

$$\forall\, z \in \Re \ : \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

وعندها نكتب:

$$z \sim N(0,1)$$
$$E(z) = 0$$
$$V(z) = 1$$

وتكون دالة التوزيع Φ تحقق:

$$\forall z \in \Re: \qquad \Phi(\mathrm{z}) = \mathrm{p}(\mathrm{Y} \le \mathrm{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz$$

إن المنحنى الممثل لدالة الكثافة الاحتمالية للمتغير Z متناظر بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $z = 0$ لأن φ هي دالة زوجية.

$$\forall\, z \in \Re: \varphi(-z) = \varphi(z)$$
$$\Phi(-z) = p(\,Z < -z\,)$$
$$= 1 - p(Z \le z)$$
$$= 1 - \Phi(z)$$

2. الدالة المولدة للعزوم

ليكن Z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري

$$\mathrm{Z} \sim N(0,1)$$
$$m_{\mathrm{z}}(t) = E(e^{tz})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$
$$= \frac{e^{\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2} dz$$
$$= \frac{e^{\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi}$$
$$m_z(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$$

نظرية:

إذا كان $X \sim N(\mu, \delta)$ فإن $\mathrm{Z} = \frac{X-\mu}{\delta} \sim N(0.1)$

$$X \sim N(\mu, \delta) \Leftrightarrow \mathrm{Z} = \frac{X-\mu}{\delta} \sim N(0,1)$$

3. الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الطبيعي العام

$$\begin{aligned} m_x(t) &= E[e^{tx}] \\ &= E\left[e^{t(\delta z+\mu)}\right] \\ &= E\left[\, e^{t\mu}. e^{(t\delta)z}\right] \\ &= e^{t\mu}\, E\left[e^{(t\delta)z}\right] \\ &= e^{t\mu}. e^{\frac{1}{2}(t\delta)^2} \end{aligned}$$

$$m_x(t) = e^{t\mu+\frac{1}{2}\delta^2 t^2}$$

4. العلاقة بين دالة التوزيع للقانون الطبيعي العام ودالة التوزيع للقانون الطبيعي المعياري:

ليكن المتغيرين العشوائيين X وZ حيث:

$$z = \frac{x-\mu}{\delta}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= p\left(\frac{X-\mu}{\delta} \leq \frac{x-\mu}{\delta}\right) \\ &= p\left(Y \leq \frac{x-\mu}{\delta}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right) \\ &= \Phi(z) \end{aligned}$$

وهكذا نلاحظ أن قيم دالة التوزيع للمتغير العشوائي x تعطى بدلالة دالة التوزيع للمتغير العشوائي Z، فكل حساب للاحتمالات المتعلقة بالتوزيع الطبيعي يمكن تحويلها إلى حساب احتمالات للقانون الطبيعي المعياري.