Chapitre 2

LA DERIVATION DES DISTRIBUTIONS

On introduit dans ce chapitre la notion de dérivation pour les distributions. On donne une généralisation de la notion de dérivée pour les distributions mais tout en conservant cette même notion classique pour des fonctions ordinaires. Par un choix particulier de quelques exemples on met en exergue la diférence entre la dérivation classique (i.e. la dérivation des fonctions) et la dérivation distributionnelle.

2.1 La Dérivation des distributions

Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors une intégration par parties donne

$$\left\langle f' \ , \ \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \ \varphi(x) dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ \varphi'(x) dx = -\left\langle f \ , \ \varphi' \right\rangle \tag{2.1}$$

ce qui motive la définition suivante :

<u>Définition 2 − 1</u>

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors la dérivée Df de $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est définie par

$$\langle Df \ , \ \varphi \rangle = -\langle f \ , \ D\varphi \rangle \ , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \ ; \tag{2.2}$$

quelquefois on note aussi la dérivée par $f^{'}$ et $\dfrac{d}{dx}f$.

Si α est un multi-indice on définit

$$\langle D^\alpha f \ , \ \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f \ , \ D^\alpha \varphi\rangle \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \ . \tag{2.3}$$

On note que le second membre de (2.3) est bien défini pour tout multi-indice α et qui représente une fonctionnelle linéaire continue dans $\mathcal{D}(\Omega)$ i.e. une distribution sur Ω.

Remarque $2-1$

Il est assez clair, d'après la définition 2 - 1, que toute distribution est indéfiniment différentiable, i.e. de classe C^∞.

Exemples

1) Soit H la fonction de *Heaviside* sur $\mathbb{R}$ définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \ . \tag{2.4}$$

Alors

$$\left\langle H^{'} \ , \ \varphi \right\rangle = -\left\langle H \ , \ \varphi^{'} \right\rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi^{'}(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta \ , \ \varphi\rangle \quad , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \tag{2.5}$$

i.e. au sens des distributions la dérivée de H est égale à δ (la distribution de Dirac), $H^{'} = \delta$.

2) La fonction signe sur $\mathbb{R}$ est définie par :

$$Sign \ x = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \ . \tag{2.6}$$

Donnons une autre forme de la fonction signe

$$Sign \ x \ = \ H(x) - H(-x) \ , \tag{2.7}$$

donc de 1) on aura au sens des distributions

$$\frac{d}{dx} Sign\ x = 2\delta. \tag{2.8}$$

<u>Théorème 2 − 1</u>

(i) La dérivée d'une distribution est aussi une distribution.

(ii) On peut intervertir l'ordre de dérivation dans la dérivation au sens des distributions.

<u>Théorème 2 − 2</u>

La dérivation est une opération linéaire continue dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans le sens suivant

$$D^\alpha(af + bg) = aD^\alpha f + bD^\alpha g\ ,\quad \forall f, g \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ et } a, b \in \mathbb{C},\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n. \tag{2.9}$$

$$\text{Si}\quad f_k \to f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ alors } D^\alpha f_k \to D^\alpha f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n. \tag{2.10}$$

<u>Remarque 2 − 2</u>

On dit qu'une suite de distributions $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers zéro si et seulement si pour toute fonction-test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ la suite numérique $\{\langle f_k\ ,\ \varphi\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro au sens usuel.

<u>*Preuve*</u> (du Théorème 2 -2)

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, pour $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $a, b \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a

$$\begin{aligned}
\langle D^\alpha(af + bg)\ ,\ \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle af + bg\ ,\ D^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle af\ ,\ D^\alpha\varphi\rangle + (-1)^{|\alpha|} \langle bg\ ,\ D^\alpha\varphi\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle f\ ,\ aD^\alpha\varphi\rangle + (-1)^{|\alpha|} \langle g\ ,\ bD^\alpha\varphi\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle f\ ,\ D^\alpha(a\varphi)\rangle + (-1)^{|\alpha|} \langle g\ ,\ D^\alpha(b\varphi)\rangle \\
&= \langle D^\alpha f\ ,\ a\varphi\rangle + \langle D^\alpha g\ ,\ b\varphi\rangle = \langle aD^\alpha f\ ,\ \varphi\rangle + \langle bD^\alpha g\ ,\ \varphi\rangle \\
&= \langle aD^\alpha f + bD^\alpha g\ ,\ \varphi\rangle .
\end{aligned}$$

i.e. que D^α, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, est une opération linéaire sur $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Montrons que si $f_k \to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ alors $D^\alpha f_k \to D^\alpha f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

En effet puisque $f_k \to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ donc $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a $\langle f_k \ , \ \varphi \rangle \to \langle f \ , \ \varphi \rangle$, quand $k \to +\infty$. On sait que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors $D^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, et par suite $\langle f_k \ , \ D^\alpha \varphi \rangle \to \langle f \ , \ D^\alpha \varphi \rangle$, quand $k \to +\infty$ donc $\langle D^\alpha f_k \ , \ \varphi \rangle \to \langle D^\alpha f \ , \ \varphi \rangle$, quand $k \to +\infty$ i.e. $D^\alpha f_k \to D^\alpha f$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemples

1) Soit la fonction

$$x_+ = \begin{cases} x & \text{si } \ x > 0 \\ 0 & \text{si } \ x \leq 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

qui définit bien une distribution régulière, car elle est localement intégrable. Elle n'est pas dérivable au sens classique au point $x = 0$, mais on peut voir qu'elle est dérivable au sens distributionnel, en effet :

$$\left\langle x_+' \ , \ \varphi \right\rangle = -\left\langle x_+ \ , \ \varphi' \right\rangle = -\int_0^{+\infty} x\varphi'(x)dx \ , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \tag{2.12}$$

une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \left\langle x_+' \ , \ \varphi \right\rangle &= [-x\varphi(x)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} H(x) \ \varphi(x)dx \\ &= \langle H(x) \ , \ \varphi \rangle \ , \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \ \text{i.e. } x_+' = H(x) \text{ au sens de } \mathcal{D}', \end{aligned} \tag{2.13}$$

où H est la fonction de *Heaviside*.

2) On définit la fonction caractéristique sur $[a \ , \ b]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$I_{[a \ , \ b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x \in [a \ , \ b] \\ 0 & \text{si } \ x \notin [a \ , \ b] \end{cases} . \tag{2.14}$$

Il est facile de vérifier que

$$I_{[a\ ,\ b]}(x) = H(x-a) - H(x-b)\ ,$$

alors

$$I'_{[a\ ,\ b]}(x) = \delta(x-a) - \delta(x-b)\ . \tag{2.15}$$

3) La fonction $\ln|x|$, pour $x \neq 0$, est intégrable au voisinage de l'origine donc elle est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ i.e. elle définit une distribution règulière dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Sa dérivée classique

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}\quad ,\quad x \neq 0 \tag{2.16}$$

qui ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$, car elle n'est pas intégrable au voisinage de l'origine ; mais sa dérivée au sens des distributions existe et on peut la calculer comme suit :

$$\left\langle \frac{d}{dx}\ln|x|\ ,\ \varphi \right\rangle = -\left\langle \ln|x|\ ,\ \varphi' \right\rangle\ ,\quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\ ; \tag{2.17}$$

donc

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d}{dx}\ln|x|\ ,\ \varphi \right\rangle &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\ \varphi'(x)dx \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln|x|\ \varphi'(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln|x|\ \varphi'(x)dx\right),\end{aligned} \tag{2.18}$$

des intégrations par parties donnent

$$\left\langle \frac{d}{dx}\ln|x|\ ,\ \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon\ln\varepsilon\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon}\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right). \tag{2.19}$$

Le premier terme au second membre est nul car φ est dérivable à l'origine et le second terme est bien défini et tend vers $\left\langle VP(\frac{1}{x}) \ , \ \varphi \right\rangle$ lorsque $\varepsilon \to 0$, i.e.

$$\frac{d}{dx} \ln |x| = VP(\frac{1}{x}) \text{ au sens de } \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}). \tag{2.20}$$

2.2 La Dérivation d'un produit $\psi \ f$

On va montrer que la dérivée d'un produit $\psi \ f$ pour $f \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$ et $\psi \in C^{\infty}(\Omega)$ obéit à la même règle ordinaire pour le produit de deux fonctions classiques

$$D(\psi f) = D\psi \ f + \psi \ Df. \tag{2.21}$$

En effet pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} \langle D(\psi f) \ , \ \varphi \rangle &= - \langle \psi f \ , \ D\varphi \rangle = - \langle f \ , \ \psi D\varphi \rangle \qquad (2.22) \\ &= - \langle f \ , D(\psi\varphi) - D\psi \ \varphi \rangle = - \langle f \ , D(\psi\varphi) \rangle + \langle f \ , D\psi \ \varphi \rangle \\ &= \langle Df \ , \ \psi\varphi \rangle + \langle f \ , \ D\psi \ \varphi \rangle = \langle \psi Df \ , \ \varphi \rangle + \langle D\psi \ f \ , \ \varphi \rangle \\ &= \langle \psi Df \ + D\psi \ f, \varphi \rangle . \qquad (2.23) \end{aligned}$$

En général on peut démontrer la formule de *Leibniz* pour le produit d'une distribution par une fonction de classe C^{∞} et on a

$$D^{\alpha}(\psi f) = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^{\beta}\psi D^{\alpha-\beta} f$$

pour $f \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$ et $\psi \in C^{\infty}(\Omega)$.

Exemple

Pour $\varphi \in D(\mathbb{R})$ et $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}\langle \psi D\delta \ , \ \varphi\rangle = \langle D\delta \ , \ \psi\varphi\rangle &= -\langle \delta \ , \ D(\psi\varphi)\rangle \quad (2.24)\\ &= -D(\psi\varphi)(0) = -\psi(0)\varphi^{'}(0) - \psi^{'}(0)\varphi(0)\\ &= \left\langle \psi(0)D\delta - \psi^{'}(0)\delta \ , \ \varphi\right\rangle \quad (2.25)\end{aligned}$$

d'où

$$\psi D\delta = \psi(0)D\delta - \psi^{'}(0)\delta \ . \quad (2.26)$$

En particulier

$$xD\delta = -\delta \ , \quad x^k D\delta = 0 \ , \quad k > 1. \quad (2.27)$$

2.3 La formule des sauts

Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $\dfrac{d}{dx}f$ existe au sens ordinaire partout sauf en un nombre fini de points a_i , $i = 1...m$ tel que $f(a_i^-)$ et $f(a_i^+)$ existent. Alors la dérivée au sens des distributions est :

$$Df(x) = \frac{d}{dx}f + \sum_{i=1}^{m} \left[f(a_i^+) - f(a_i^-)\right]\delta(x - a_i) \quad (2.28)$$

cette formule s'appelle formule des sauts.

En effet, soit $\varphi \in D(\mathbb{R})$, alors pour un point de discontinuité a, on a

$$\langle Df(x) \ , \ \varphi\rangle = -\langle f(x) \ , \ D\varphi\rangle = -\int_{-\infty}^{a} f(x)\varphi^{'}(x)dx - \int_{a}^{+\infty} f(x)\varphi^{'}(x)dx$$

$$= \left[f(a^+) - f(a^-)\right] \varphi(a) + \int\limits_{-\infty}^{a} \frac{d}{dx} f \ \varphi(x) dx - \int\limits_{a}^{+\infty} \frac{d}{dx} f \ \varphi(x) dx$$

$$= \left[f(a^+) - f(a^-)\right] \langle \delta(x-a) \ , \ \varphi \rangle + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} f \ \varphi(x) dx$$

alors

$$Df(x) = \left[f(a^+) - f(a^-)\right] \langle \delta(x-a) \ , \ \varphi \rangle + \frac{d}{dx} f \ .$$

Remplaçons maintenant a par a_i et sommons pour $i = 1, 2, ...m$ i.e. si on suppose que $a_1 < a_2 < ... < a_m$ alors pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$ on a

$$\langle Df(x) \ , \ \varphi \rangle = - \langle f(x) \ , \ D\varphi \rangle = - \int\limits_{-\infty}^{a_1} f(x) \varphi^{'}(x) dx - \sum_{i=1}^{m-1} \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) \varphi^{'}(x) dx - \int\limits_{a_m}^{+\infty} f(x) \varphi^{'}(x) dx.$$

Par des intégrations par parties on peut facilement voir que

$$\langle Df(x) \ , \ \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{m} \left[f(a_i^+) - f(a_i^-)\right] \varphi(a_i) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} f(x) \ \varphi(x) dx$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left[f(a_i^+) - f(a_i^-)\right] \langle \delta(x-a_i) \ , \ \varphi \rangle + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} f(x) \ \varphi(x) dx$$

i.e. au sens des distributions on a

$$Df(x) = \frac{d}{dx} f + \sum_{i=1}^{m} \left[f(a_i^+) - f(a_i^-)\right] \delta(x-a_i).$$

Remarque 2 − 3

On peut avoir la même chose même dans le cas d'un nombre dénombrable de points de discontinuité $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ i.e.

$$Df(x) = \frac{d}{dx}f + \sum_{i=1}^{+\infty} \left[f(a_i^+) - f(a_i^-) \right] \delta(x - a_i).$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{\pi}) \quad , \quad x \in [0 \ , \ 2\pi]$$

périodique de période 2π. Le saut aux points de discontinuité $x = \pm 2m\pi, \ m \in \mathbb{N}$, est 1. Alors en appliquant la formule des sauts on obtient

$$Df(x) = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2m\pi).$$

2.4 Les distributions homogènes

Définition 2 − 2

Soit $f \in D^{'}(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est homogène de degré α si pour tout $\lambda > 0$ et $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\langle f \ , \ \varphi_\lambda \rangle = \lambda^{-n-\alpha} \langle f \ , \ \varphi \rangle \tag{2.29}$$

où φ_λ est la fonction $x \mapsto \varphi(\lambda x)$.

Exemples et remarques

1) Si f est donnée par une fonction continue cette définition coïncide avec la notion classique de fonction homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ i.e. $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$. En effet si f est homogène en ce dernier sens, alors $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\langle f\ ,\ \varphi_\lambda \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(\lambda x)dx = \lambda^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} f(\frac{x}{\lambda})\varphi(x)dx = \lambda^{-n-\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx = \lambda^{-n-\alpha}\langle f\ ,\ \varphi\rangle \tag{2.30}$$

d'où (2.29) et réciproquement.

2) Si f est une distribution homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\dfrac{\partial}{\partial x_i}f$ est homogène de degré $\alpha - 1$.

3) Si ψ est une fonction C^∞ homogène de degré α_1 et f une distribution homogène de degré α_2 alors ψf est homogène de degré $\alpha_1 + \alpha_2$.

4) La distribution $f = D^\alpha \delta$ est homogène de degré $-n - |\alpha|$. En effet

$$\begin{aligned}\langle D^\alpha\delta\ ,\ \varphi_\lambda\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle \delta\ ,\ D^\alpha\varphi_\lambda\rangle = (-1)^{|\alpha|}\left\langle \delta\ ,\ \lambda^{|\alpha|}\left(D^\alpha\varphi\right)_\lambda\right\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\ \lambda^{|\alpha|}D^\alpha\varphi(0) = (-1)^{|\alpha|}\ \lambda^{|\alpha|}\langle\delta\ ,\ D^\alpha\varphi\rangle \\ &= \lambda^{|\alpha|}\langle D^\alpha\delta\ ,\ \varphi\rangle == \lambda^{-n-(-n-|\alpha|)}\langle D^\alpha\delta\ ,\ \varphi\rangle \quad \forall\varphi\in\ D(\mathbb{R}^n).\end{aligned} \tag{2.31}$$

Le théorème suivant donne une caractérisation des distributions homogènes.

Théorème 2 − 3

Une distribution $f \in D^{'}(\mathbb{R}^n)$ est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f = \alpha f \quad . \tag{2.32}$$

2.4.1 Les distributions indépendantes d'une variable

Si $f \in D^{'}(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}$ et si e_k est le k-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la distribution $\tau_{he_k} f$ (la translatée suivant la direction k) est définie par

$$\langle \tau_{he_k} f \ , \ \varphi \rangle = \langle f \ , \ \tau_{-he_k} \varphi \rangle \quad , \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \ ; \tag{2.33}$$

où $(\tau_{-he_k}\varphi)(x) = \varphi(x - he_k)$.

Définition 2 − 3

Soit $f \in D^{'}(\mathbb{R}^n)$ et $k \in \{1, \ 2, \ ..., n\}$. on dit que f est indépendante de x_k si

$$\tau_{he_k} f = f \quad , \quad \forall h \in \mathbb{R}. \tag{2.34}$$

Remarque 2 − 4

Notons que si f est donnée par une fonction continue alors la définition ci-dessus signifie que

$$f(x) = \tilde{f}(x_1, .., x_{k-1}, x_{k+1}, .., x_n).$$

Théorème 2 − 4

Soit $f \in D^{'}(\mathbb{R}^n)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) f est indépendante de x_k .

(ii) $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ dans $D^{'}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ de la forme $\varphi(x) = \varphi_0(x_k)\tilde{\varphi}(x_1, .., x_{k-1}, x_{k+1}, .., x_n)$

où $\varphi_0 \in D(\mathbb{R})$, $\tilde{\varphi} \in D(\mathbb{R}^{n-1})$ et on a

$$\langle f \ , \ \varphi\rangle = \langle f \ , \ \chi\tilde{\varphi}\rangle \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t)dt \ ; \tag{2.35}$$

où $\chi \in D(\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t)dt = 1$.

Remarque $2-5$

Si f est donnée par une fonction continue et si $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ dans $D^{'}(\mathbb{R}^n)$, le résultat précédent montre que

$$f(x) = \tilde{f}(x_1, .., x_{k-1}, x_{k+1}, .., x_n). \tag{2.36}$$

Corollaire $2-1$

Soit $f \in D^{'}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ dans $D^{'}(\mathbb{R}^n)$ pour $k = 1, 2, ...n$. Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\langle f \ , \ \varphi\rangle = C \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx \ , \quad \forall\varphi \in D(\mathbb{R}^n). \tag{2.37}$$

i.e. f est constante.

Corollaire $2-2$

Soit $f \in D^{'}(\mathbb{R}^n)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} \in C^0(\mathbb{R}^n)$ pour $k = 1, 2, ...n$ (au sens de $D^{'}(\mathbb{R}^n)$).

(ii) $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire $2-3$

Soit $f \in D^{'}(\mathbb{R}^n)$ et $k \in \mathbb{N}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $D^\alpha f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leq k$ (au sens de $D^{'}(\mathbb{R}^n)$).

(ii) $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire $2-4$

L'énoncé du corollaire 2-3 est encore valable lorsqu'on remplace $\mathbb{R}^n$ par un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

2.5 Les Solutions élémentaires

Définitions $2-4$

Soit P un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$. Une solution élémentaire de P est une distributions G sur $\mathbb{R}^n$ telle que

$$P\ \ [G(x)] = \delta(x). \tag{2.38}$$

Exemple

La fonction localement intégrable

$$G(t,x) = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp(-\frac{|x|^2}{4t}) \tag{2.39}$$

est une solution élémentaire de l'opérateur de la chaleur $P = \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$ sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$.

2.6 Exercices

Exercice 01 :

a) Soient $p,\ q \in \mathbb{N}$, calculer : $f = x^p\delta^{(q)}$ où $\delta^{(k)}$ est la dérivée $k^{ème}$ de la distribution de Dirac sur $\mathbb{R}$.

b) Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$, calculer $f = e^{\alpha x}\ \delta^{(k)}$.

Exercice 02 :

On considère l'application linéaire f de $D(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\begin{aligned} f \ : \ D(\mathbb{R}^2) \ &\to \ \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \langle f \ , \ \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x \ , -x)dx \ . \end{aligned}$$

Montrer que $f \in D\prime(\mathbb{R}^2)$ et calculer au sens des distributions $\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right) f$.

Exercice 03 :

On considère l'opérateur différentiel sur $\mathbb{R}$

$$P = \frac{d^2}{dx^2} + a\frac{d}{dx} + b \quad ; \quad a, \ b \ \in \mathbb{C}.$$

Soient f et g deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que

(i) $Pf(x) = Pg(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(0) = g(0)$;

(iii) $f\prime(0) - g\prime(0) = 1$.

On pose

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \leq 0 \\ g(x) & , \quad x > 0 \end{cases} ;$$

et on considère la distribution f_1 définie par

$$\langle f_1 \ , \ \varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)dx \ , \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Calculer Pf_1 au sens des distributions.

Exercice 04 :

I) Soit H la fonction de $Heaviside$

$$H\ (x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases} .$$

Calculer $\frac{d}{dx} H$ au sens des distributions et en déduire une solution élémentaire de $\frac{d}{dx}$.

II) Soit, pour $k \geq 2$

$$E_k = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} H\ (x)\ ,$$

1) Montrer que E_k est une solution de

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-1} E = H\ (x)\ .$$

2) Déduire une solution élémentaire de $\left(\frac{d}{dx}\right)^{k}$.

III) Soit, $k \geq 1$.

1) Donner une solution particulière de

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{k} U = f \qquad (\bigstar)$$

où $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ i.e f est une distribution à support compact.

2) Déduire ensuite la solution générale de l'équation $(\bigstar)$.

(**Ind :** $x^p \delta^{(q)} = 0 \quad$ si $p > q$).