République algérienne démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement supérieur
Université de Abdelhafid Boussouf-Mila

Faculté de sciences et Technologies
Département de sciences et techniques
1er année Master-structures

Présenté par :
Dr. BELGHIAT Choayb

CHAPITRE I

Rappels Mathématiques

Année universitaire 2020-2021

Matrices

$$\begin{array}{cc} & n \\ A = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \end{array} m$$

Chaque élément est désigné par deux indices *i* , *j*

Si *m* = *n*

La matrice est dite carrée

Si *m* = *n* =*1*

La matrice se réduit à un scalaire

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Système d’équations

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

Forme matricielle

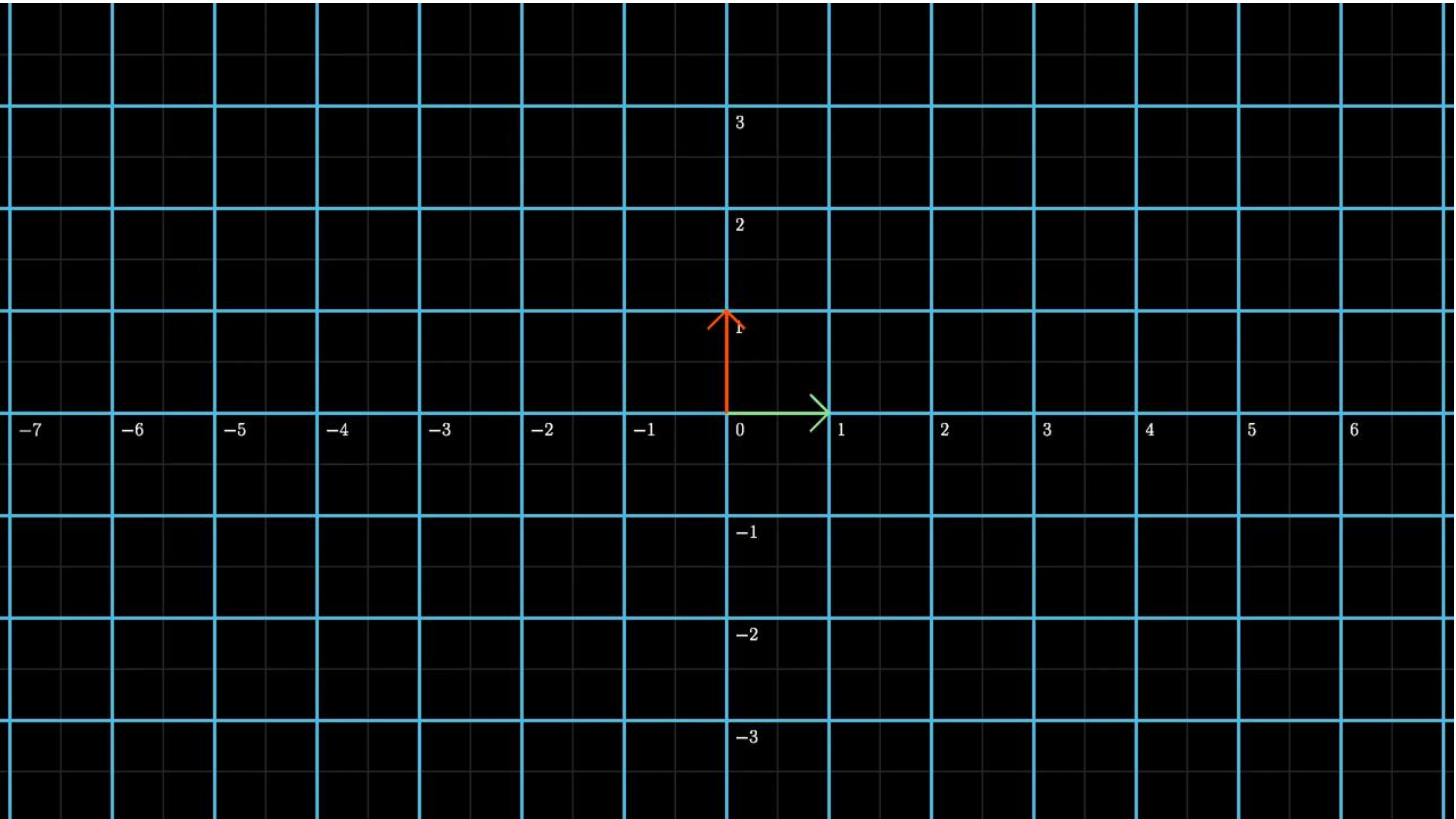
$$\boldsymbol{A\,X = B}$$

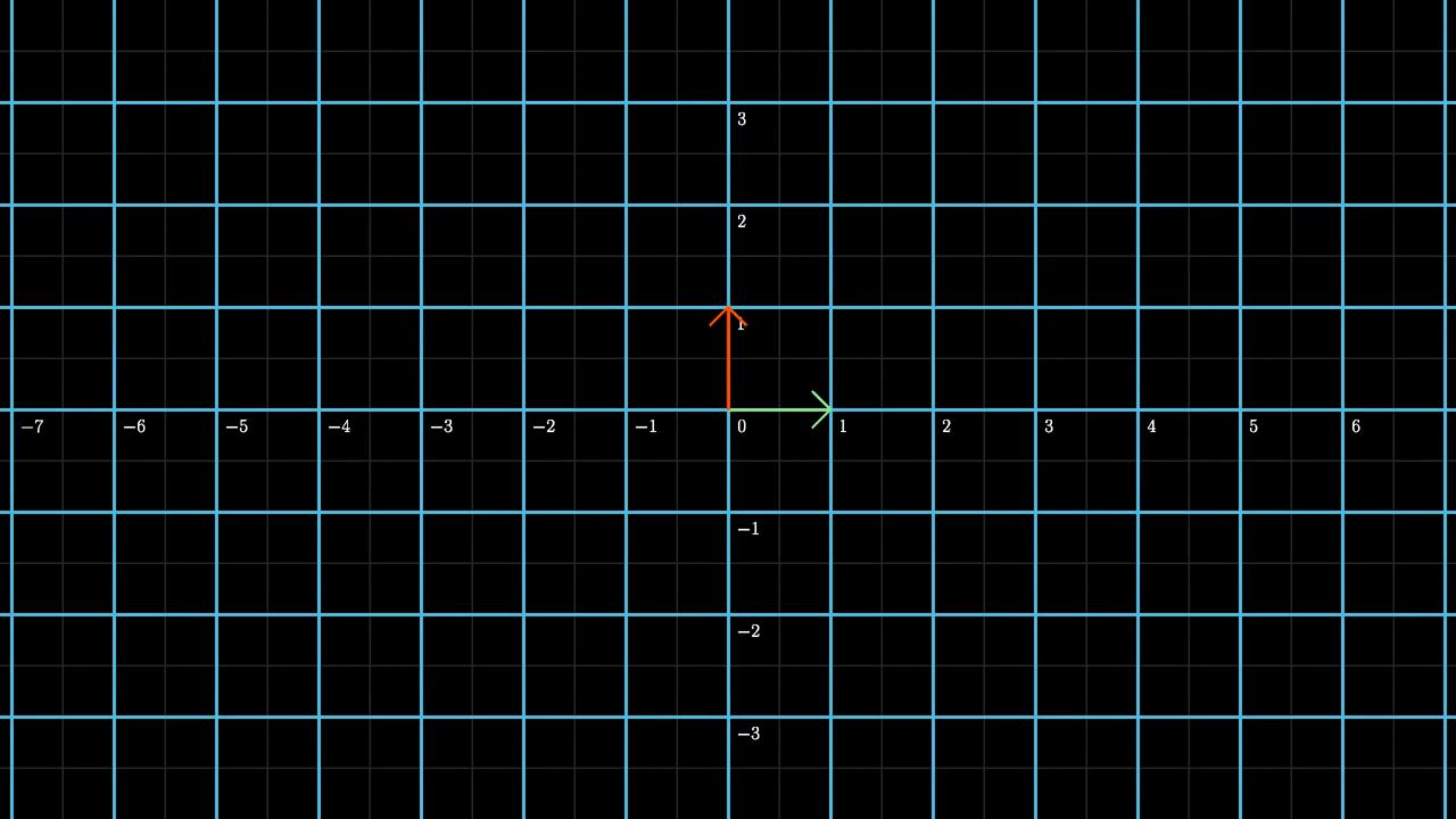
Forme compacte

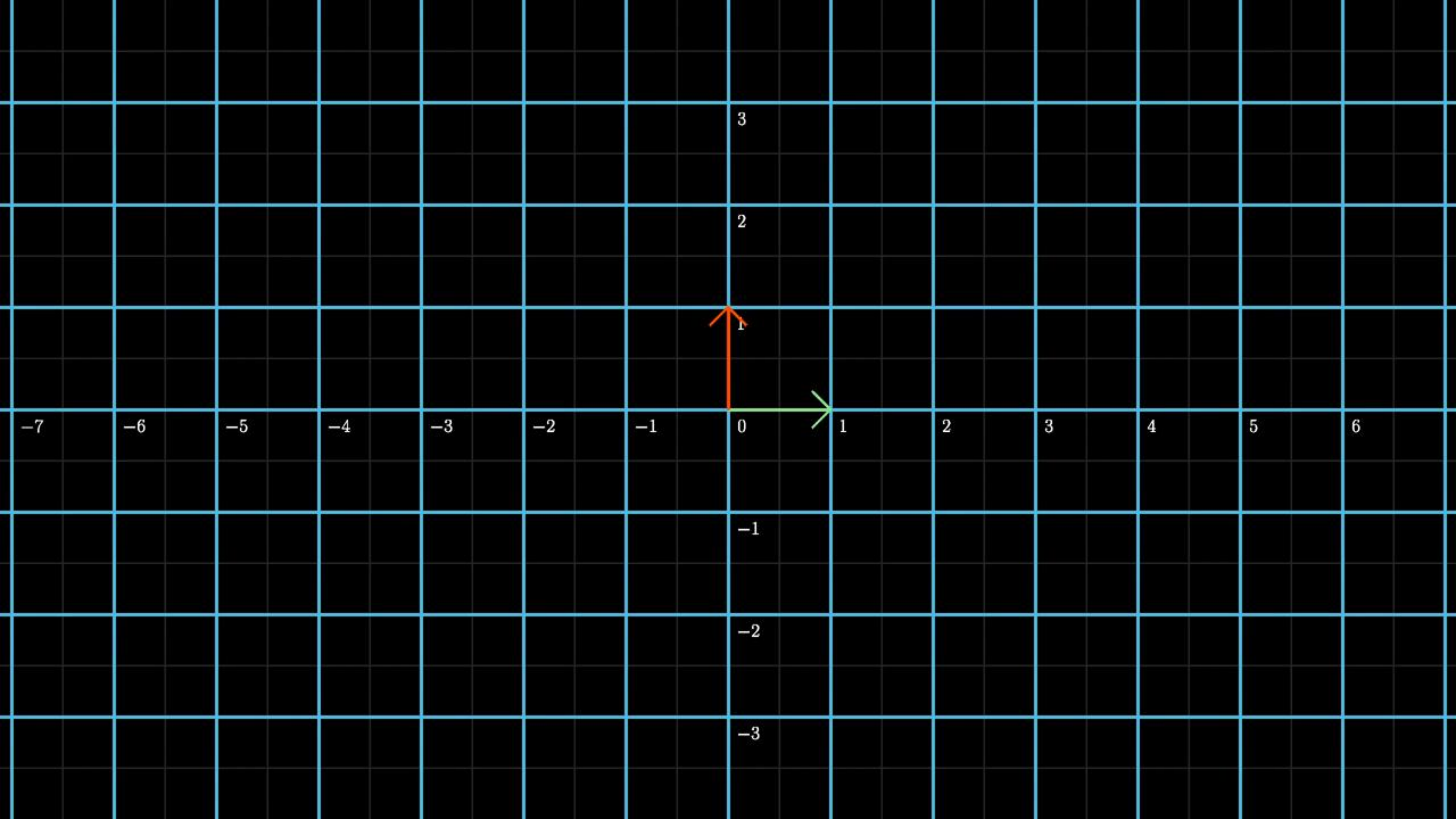
On transforme le vecteur ***X*** , en un vecteur ***B*** à l’aide de ***A***

Une matrice M est une application linéaire qui associe à tout vecteur V une image V ’

$$V \xrightarrow{M} V' = M\,V$$


3
2
1
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
−1
−2
−3


3
2
1
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
−1
−2
−3


3
2
1
−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6
−1
−2
−3

Déterminant

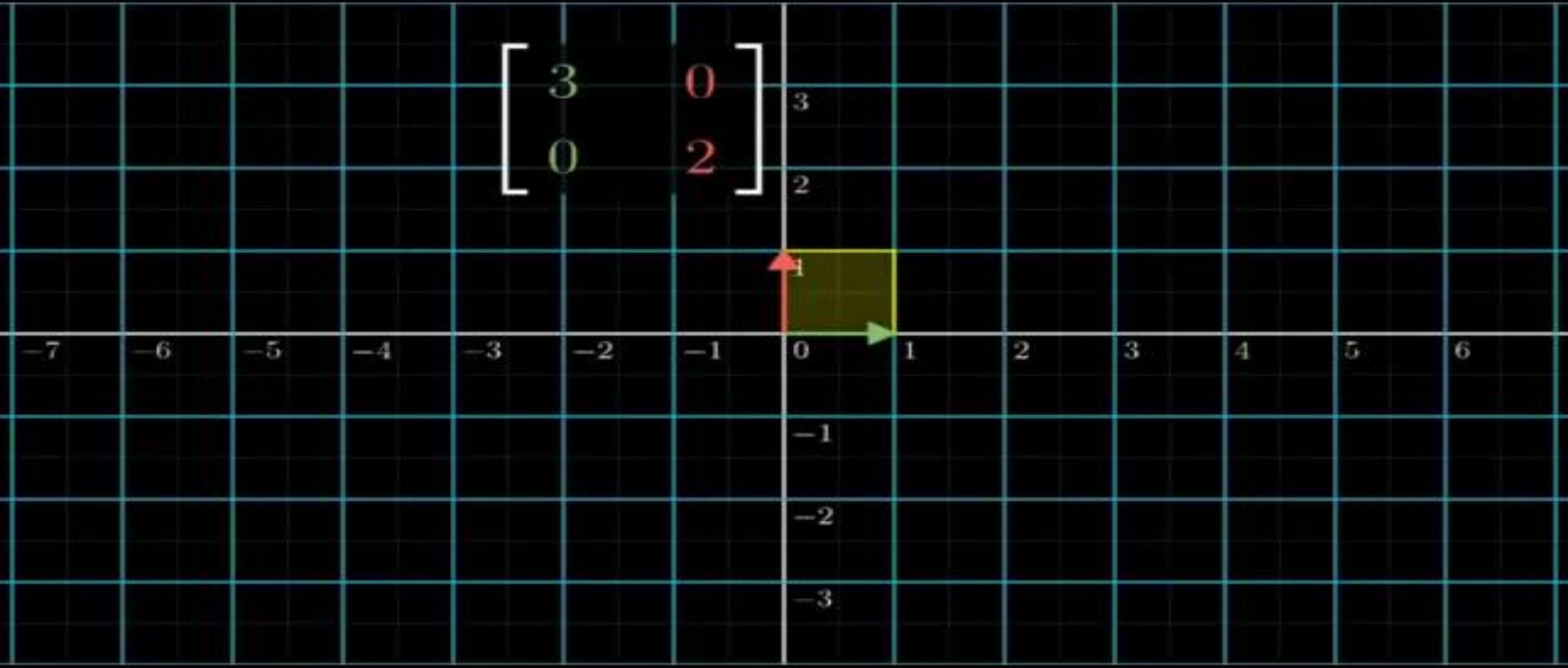
si $\boldsymbol{A}$ = a11 est de dimension (1×1) : $\det(A) = a_{11}$

si $\boldsymbol{A}$ =$\left[a_{ij}\right]$ est de dimension (2×2) : $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

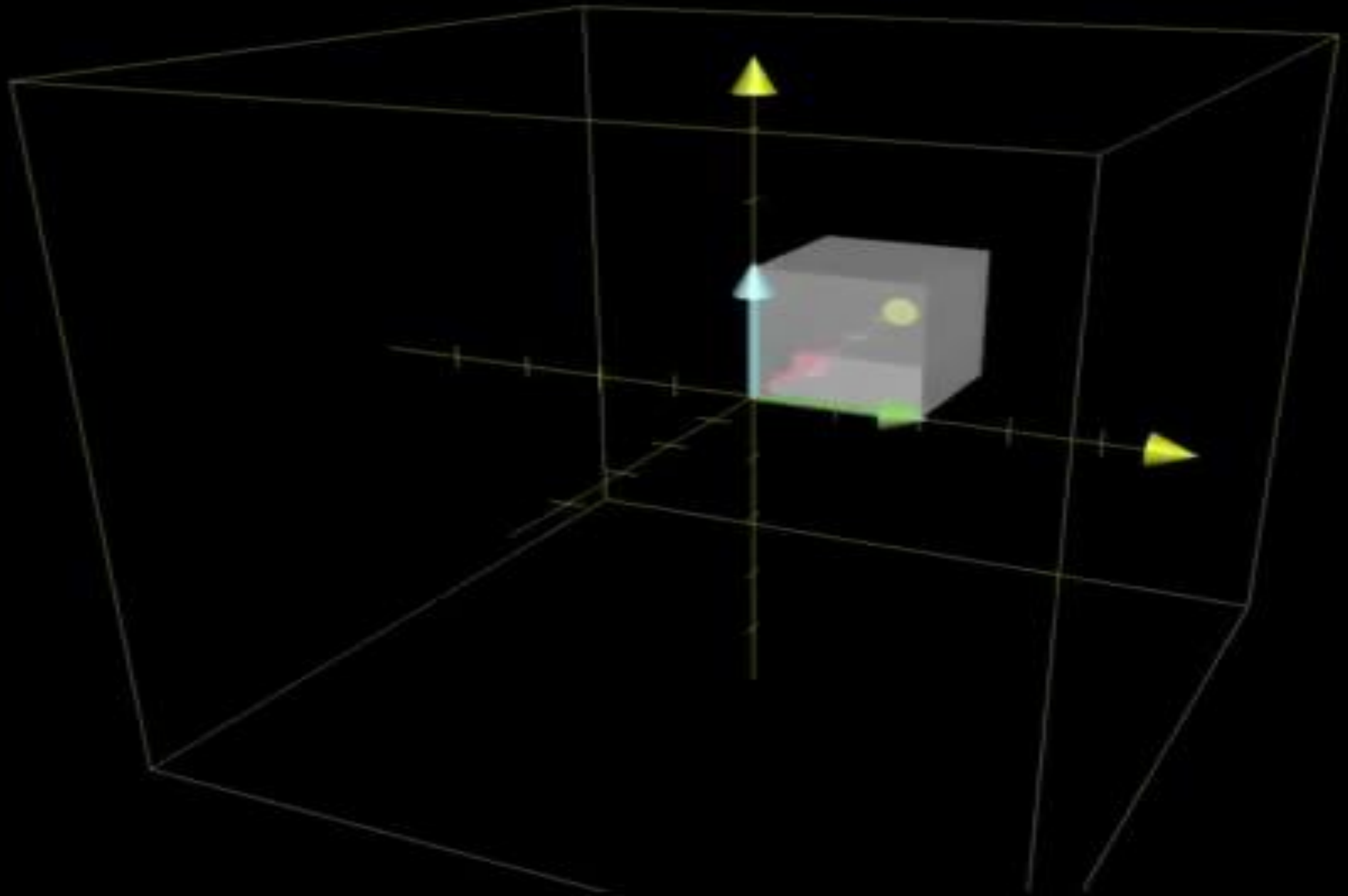
si $\boldsymbol{A}$ =$\left[a_{ij}\right]$ est de dimension (3×3) : $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

si $\boldsymbol{A}$ =$\left[a_{ij}\right]$ est de dimension n (n×n) : $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \cdots + \cdots \pm a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}$

Remarque: En élasticité, on se limite aux matrices d’ordre 2 et de dimension (3x3), (n = 3).



$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
3
2
1
−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6
−1
−2
−3



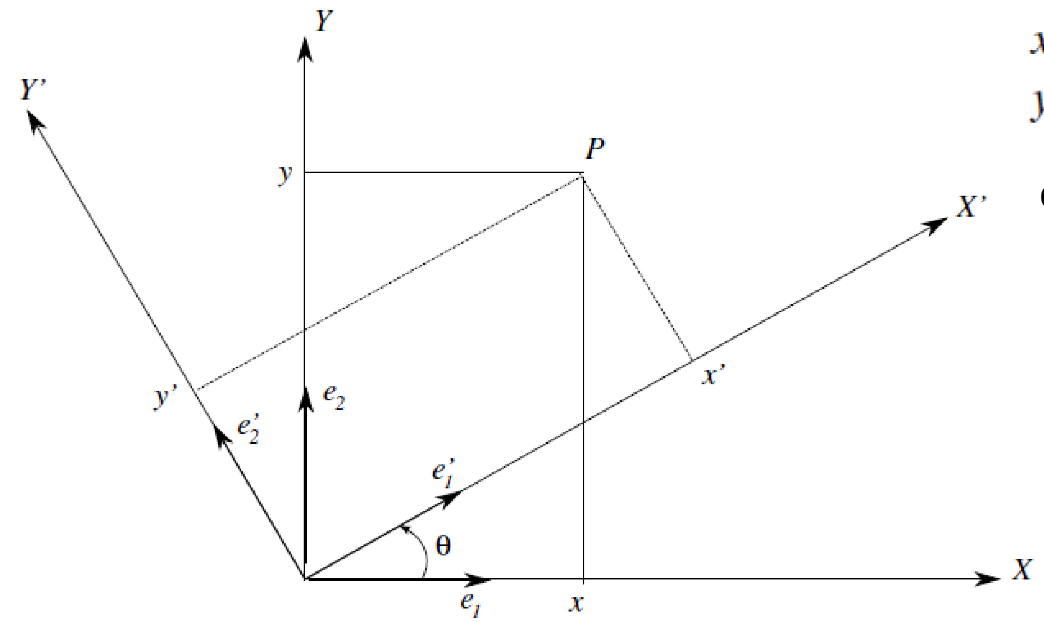
Opérations matricielles

- Egalité $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \,:\, a_{ij} = b_{ij}$
- Transposée $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^T \,:\, b_{ij} = a_{ji}$
- Multiplication par un scalaire $\boldsymbol{B} = m\boldsymbol{A} \,:\, b_{ij} = m a_{ij}$
- Multiplication matricielle $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \,:\, c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$
- Inversion matricielle $\boldsymbol{A}^{-1}$ inverse de $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$

Remarques:

1. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$
2. $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$
3. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$
4. $\det(m\boldsymbol{A}) \neq m\det(\boldsymbol{A})$

Matrice de rotation



$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

ou encore, en plus compacte : $\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}$

A est la matrice de rotation de repère, elle contient les cosinus directeurs des nouveaux axes par rapport aux anciens axes. Si on note les vecteurs unitaires des axes originaux e1 et e2, ceux des nouveaux axes e'1 et e'2 alors :

$$a_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j$$

Cas de deux rotation:

$$\begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\phi) & \sin(\theta+\phi) \\ -\sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

Inverse d'une rotation

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{V}' \quad ; \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^T$$

L'inverse d'une matrice de rotation est égale à sa transposée.

Rotation 3D

La rotation 2D fait changer les coordonnées x et y, la coordonnées z reste telle qu'elle (z' = z). On dit que la rotation 2D se fait par rapport à l'axe Z et on écrit le changement de coordonnées en incluant z comme suit :

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{A}_z \boldsymbol{V}$$

De même on écrit les matrices de rotations d'angles θx et θy par rapport aux axes X et Y comme suit :

$$\boldsymbol{A}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & \sin(\theta_x) \\ 0 & -\sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_y = \begin{bmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \sin(\theta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) \end{bmatrix}$$

Remarque:
Une rotation Ax par rapport à X suivie d'une rotation Ay par rapport à Y est différente de la rotation Ay suivie de la rotation Ax :

$$\boldsymbol{A}_y \boldsymbol{A}_x \neq \boldsymbol{A}_x \boldsymbol{A}_y$$

Transformation linéaire

Une transformation linéaire est une transformation dans laquelle chaque nouvelle variable est une combinaison linéaire d'anciennes variables

$$x' = ax + by \quad ; \quad y' = cx + dy \qquad \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{V'} = \boldsymbol{MV}$$

Si x' est perpendiculaire à y' et $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$ alors cette transformation est dite orthogonale.

Remarque: La longueur d'un vecteur ne change pas avec la rotation d'axes, alors la rotation d'axes est une transformation orthogonale.

Note: Une transformation orthogonale est une transformation qui préserve les angles et les longueurs.

La matrice M d'une transformation orthogonale est une matrice orthogonale ce qui donne :

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \boldsymbol{M}^T$$

Démonstration:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x'^2 + y'^2 \\ &= (ax + by)^2 + (cx + dy)^2 \\ &= (a^2 + c^2)x^2 + (b^2 + d^2)y^2 + 2(ab + cd)xy \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} a^2 + c^2 &= 1 \\ b^2 + d^2 &= 1 \\ ab + cd &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{M}^T\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}$$

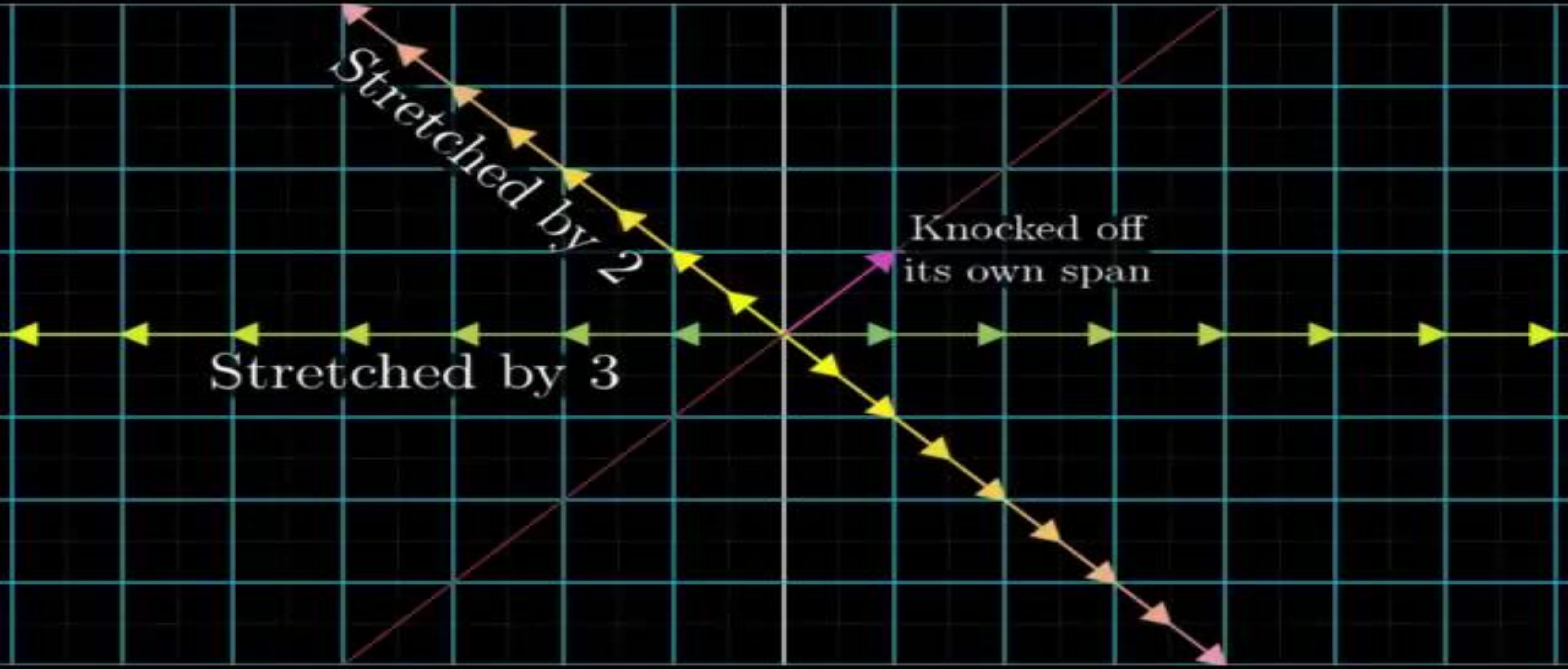
Dans une transformation linéaire, un vecteur V d'origine (0,0) et d'extrémité (x, y) se transforme en un vecteur V ' d'origine (0,0) et d'extrémité (x', y'), il subit alors une rotation et un allongement (ou rétrécissement).

La transformation engendre un changement de direction et un changement de module des vecteurs. Si on veut s'intéresser aux vecteurs qui ne subissent pas de rotation avec la transformation alors on cherche V ' qui restent parallèles à V :

$$\boldsymbol{V'} \,//\, \boldsymbol{V} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{V'} = \lambda \boldsymbol{V} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{MV} = \lambda \boldsymbol{V} \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{M} - \lambda \boldsymbol{I})\,\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$$

Cette équation possède une solution non triviale ($V \neq 0$) si le déterminant : $\det(M - \lambda I) = 0$

Les racines de cette équation sont appelées valeurs propres de la matrice M et les vecteurs correspondant sont appelés vecteurs propres.



Stretched by 2
Knocked off
its own span
Stretched by 3

Diagonalisation d'une matrice

Dans le repère initial (XY) muni de vecteurs unitaires (e1,e2), la transformation d'un vecteur V à l'aide de la matrice de transformation M donne :

$$V' = MV$$

Avec une rotation d'axes de matrice A, les vecteurs V et V ' s'expriment par : $U = AV \quad ; \quad U' = AV'$

soit par rotation inverse : $V = A^T U \quad ; \quad V' = A^T U'$

La transformation de V en V ' à l'aide de M s'écrit : $A^T U' = M(A^T U)$

d'où la transformation de U en U' : $U' = AMA^T U \quad ; \quad U' = DU$

Si la rotation fait coïncider les nouveaux axes avec les directions principales, alors la matrice D est diagonale.

On s'intéresse alors dans la diagonalisation d'une matrice à la description de la transformation linéaire dans un nouveau repère. Ce qui est déduit par la rotation du repère initial aux direction principales.

Exemple 1 et 2

Tenseurs

Les tenseurs sont la généralisation des scalaires, des vecteurs et des matrices. Un tenseur est un mot générique d'entités mathématiques qui désigne une quantité physique.

Dans ce cours, on s'intéresse aux tenseurs cartésiens, le système de référence est donc un repère orthonormé (OXYZ) qui peut subir une rotation de matrice A et se changer en un repère (OX'Y'Z').

Un tenseur cartésien T d'ordre n est une fonction qui associe à un repère (2D/3D) un groupe de (2^n / 3^n) composantes réelles $T_{ijk,,,}$ qui se transforment selon la relation suivante :

$$T'_{lmn\cdots} = \sum_{i,j,k\cdots=1}^{3} a_{li}\, a_{mj}\, a_{nk} \cdots T_{ijk\cdots}$$

Les a_{li} désignent les cosinus directeurs des nouveaux axes du repère (OX'Y'Z') par rapport au repère initial (OXYZ).

Tenseur d'ordre 1

$$V'_l = \sum_{i=1}^{3} a_{li} V_i$$

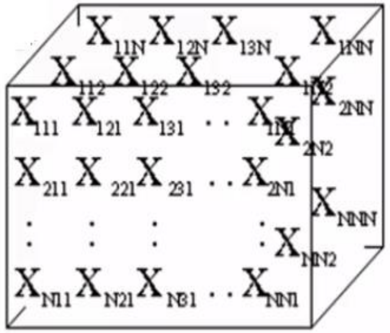
Tenseur d'ordre 2

$$V'_{kl} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ki} a_{lj} V_{ij}$$

Ordre	Entité	Dimension	Nbr. Composantes	Notation
0	scalaire	$2D$ $3D$	$2^0 = 1$ $3^0 = 1$	a
1	vecteur	$2D$ $3D$	$2^1 = 2$ $3^1 = 3$	a_i
2	matrice	$2D$ $3D$	$2^2 = 4$ $3^2 = 9$	a_{ij}
n		$2D$ $3D$	2^n 3^n	$a_{ijk\cdots}$

$$S \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

T =



Propriétés des tenseurs

Symétrie

Un tenseur d’ordre $n > 2$ est dit symétrique par rapport à une paire d’indices si ses composantes restent inchangées sous l’effet d’une permutation de ces indices :
$V_{ijk\cdots} = V_{jik\cdots}$: symétrie par rapport à $i\,j$, et
$V_{ijk\cdots} = V_{ikj\cdots}$: symétrie par rapport à jk.

Antisymétrie

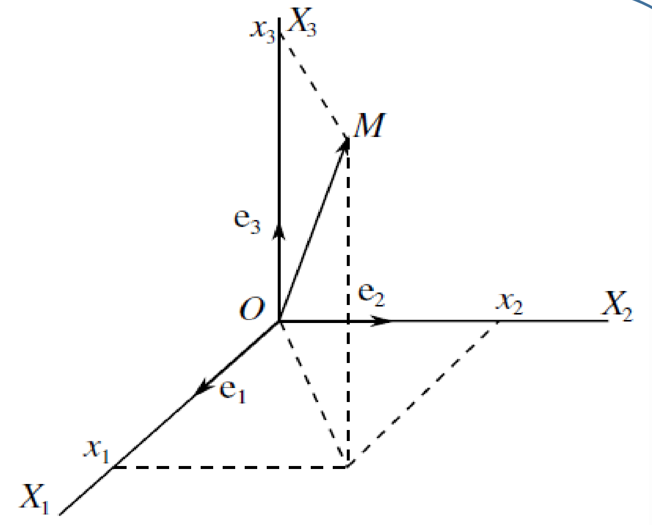
Un tenseur d’ordre $n > 2$ est dit antisymétrique par rapport à une paire d’indices si ses composantes changent de signe sous l’effet d’une permutation de ces indices :
$V_{ijk\cdots} = -V_{jik\cdots}$: antisymétrie par rapport à $i\,j$, et
$V_{ijk\cdots} = -V_{ikj\cdots}$: antisymétrie par rapport à jk

Isotropie

Un tenseur est dit isotrope si ses composantes restent inchangées sous l’effet d’une rotation de repère. Exemple : le tenseur identité I : $I' = AIA^T = I$

Notation indicielle

Tenseur d'ordre 0	Scalaire	$a\ ,\ b\ ,\ \alpha$	1 composante
Tenseur d'ordre 1	Vecteur	$a_i\ ,\ v_i\ ,\ V_i$	3 composantes
Tenseur d'ordre 2	Matrice	$a_{ij}\ ,\ v_{ij}\ ,\ T_{ij}$	9 composantes
Tenseur d'ordre 3		$a_{ijk}\ ,\ v_{ijk}\ ,\ T_{ijk}$	27 composantes
Tenseur d'ordre 4		$a_{ijkl},\ v_{ijkl},\ D_{ijkl}$	81 composantes



Convention de somme

Si on considère la somme : $S = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n.$

son écriture compacte usuelle est : $$S = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad \text{ou} : S = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \quad \text{ou bien} : S = \sum_{m=1}^{n} a_m x_m$$

Les indices i , j et m sont appelés indices muets dans le sens où la valeur de S ne dépend pas de l'indice utilisé dans l'expression de la somme. On peut simplifier d'avantage l'écriture de cette somme on adoptant la convention de somme d'Einstien suivante :

Lorsqu'un indice est répété (apparait 2 fois) dans un même terme, ça implique une somme sur l'indice répété L'écriture précédente se simplifie donc en :

$$S = a_i x_i$$

Remarque

Les expressions telles que ai bi xi où l'indice apparait plus de deux fois sont exclues de la convention, le signe ***Σ*** doit être gardé pour désigner une somme des termes, sinon l'écriture est interprétée comme un seul terme.

Notation indicielle

Double somme

Lorsqu'un terme contient deux indices, chacun apparaît deux fois, une double somme sur les deux indices est interprétée.

$$\begin{aligned} a_{ij}x_ix_j &= (a_{i1}x_ix_1)+(a_{i2}x_ix_2)+(a_{i3}x_ix_3) \\ &= (a_{11}x_1x_1+a_{21}x_2x_1+a_{31}x_3x_1) \\ &+ (a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2x_2+a_{32}x_3x_2) \\ &+ (a_{13}x_1x_3+a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3x_3) \end{aligned}$$

Indice libre

Un indice est dit indice libre s'il est répété de part et d'autre du signe égal (=) d'une équation.

L'écriture $C_i = A_i + B_i$ est interprétée comme suit : le vecteur C est la somme des vecteurs A et B.

L'écriture $Y_i = A_{ij}X_j$ comporte un indice libre *i* qui désigne 3 équations et un indice muet *j* qui désigne une somme.
Explicitement :

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{1,j}x_j = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{2,j}x_j = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 &= a_{3,j}x_j = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}$$

Symboles

Symbol de Kronecker

Le symbole delta de Kronecker est défini comme suit : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1. symétrie : $\delta_{ij} = \delta_{ji}$
2. isotropie : $\delta_{kl} = a_{ki}a_{lj}\delta_{ij} = \delta_{ij}$
3. trace : $\delta_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 3$
4. produit avec un vecteur : $\delta_{ij}V_j = V_i$; $\delta_{ij}\, V_i = V_j$ particulièrement : $e_i = \delta_{ij}\, e_j$
5. produit scalaire des vecteurs unitaires : $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$
6. trace d'une matrice : $\delta_{ij}A_{ij} = A_{ii} = A_{jj}$

Symbole de Permutation

Le symbole de permutation E est défini comme suit : $\mathscr{E}_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i\,j\,k \text{ apparaissent dans l'ordre } 12312\ldots \\ -1 & \text{si } i\,j\,k \text{ apparaissent dans l'ordre } 32132\ldots \\ 0 & \text{si } i\,j\,k \text{ apparaissent dans un autre ordre} \end{cases}$

$$\mathscr{E}_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$$

Toute interchange dans les indices entraîne l'inversion de signe du symbole :

$$\mathscr{E}_{ijk} = -\mathscr{E}_{kji} = \mathscr{E}_{kij} = -\mathscr{E}_{ikj}$$

Les produits vectoriels des vecteurs unitaires s'écrivent comme suit : $\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = \mathscr{E}_{ijk}\boldsymbol{e}_k$

D'une manière générale $U \wedge V = \mathscr{E}_{ijk}u_i v_j \boldsymbol{e}_k$

Exemple 3 et 4

Définition

Un champ tensoriel associe à chaque position M(xi), et à chaque instant t , un tenseur Ti j ···(M, t).

La différentiation par rapport au temps

$$\frac{\partial T_{ij\cdots}}{\partial t} \text{ ou : } \dot{T}$$

La différentiation spatiale par rapport à la coordonnée xp

$$\frac{\partial T_{ij\cdots}}{\partial x_p} \text{ ou : } \partial_p T_{ij\cdots}$$

$$\text{ou bien : } T_{ij\cdots,p}$$

La dérivée partielle seconde par rapport à xp et xq

$$\frac{\partial^2 T_{ij\cdots}}{\partial x_p \partial x_q} \text{ ou : } \partial_{pq} T_{ij\cdots}$$

$$\text{ou bien : } T_{ij\cdots,pq}$$

Différentiation d'un vecteur

V = $V_i e_i$ est un vecteur

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V_1}{\partial t}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial V_2}{\partial t}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial V_3}{\partial t}\boldsymbol{e}_3 = V_{i,t}\,\boldsymbol{e}_i = \dot{V}_i \boldsymbol{e}_i$$

λ est un tenseur d'ordre 0 (scalaire) et A et B sont des tenseurs d'ordre 1

$$\frac{\partial(\lambda A)}{\partial t} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} A + \lambda \frac{\partial A}{\partial t}$$

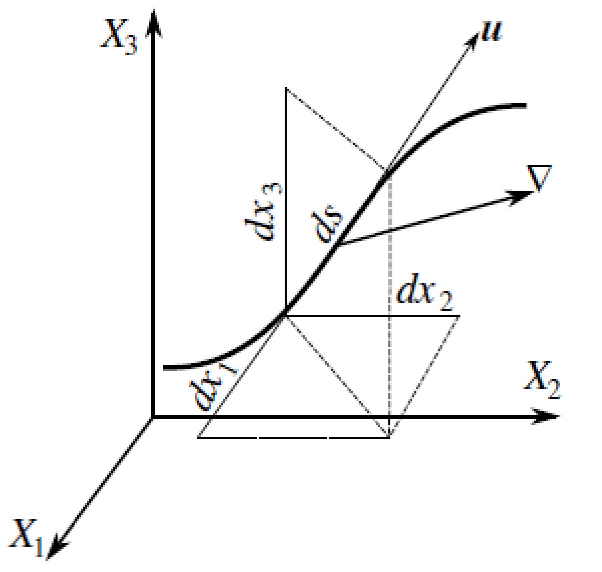
$$\frac{\partial(A \cdot B)}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} \cdot B + A \cdot \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\frac{\partial(A \wedge B)}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} \wedge B + A \wedge \frac{\partial B}{\partial t}$$

Gradient d'un scalaire

On considère un tenseur d'ordre zéro (scalaire) Ø fonction de la position : Ø = Ø (x1, x2, x3), et s une courbe dans l'espace s = s(x1, x2, x3). La variation de Ø le long de s est donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial s} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial s}$$



$\partial x_i / \partial s$ sont les cosinus directeurs du vecteur unitaire u tangent à ds.

$$\boldsymbol{u} = < \frac{\partial x_1}{\partial s} \quad \frac{\partial x_2}{\partial s} \quad \frac{\partial x_3}{\partial s} >$$

On introduit le vecteur des dérivées appelé operateur gradient :

$$\nabla = < \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} >$$

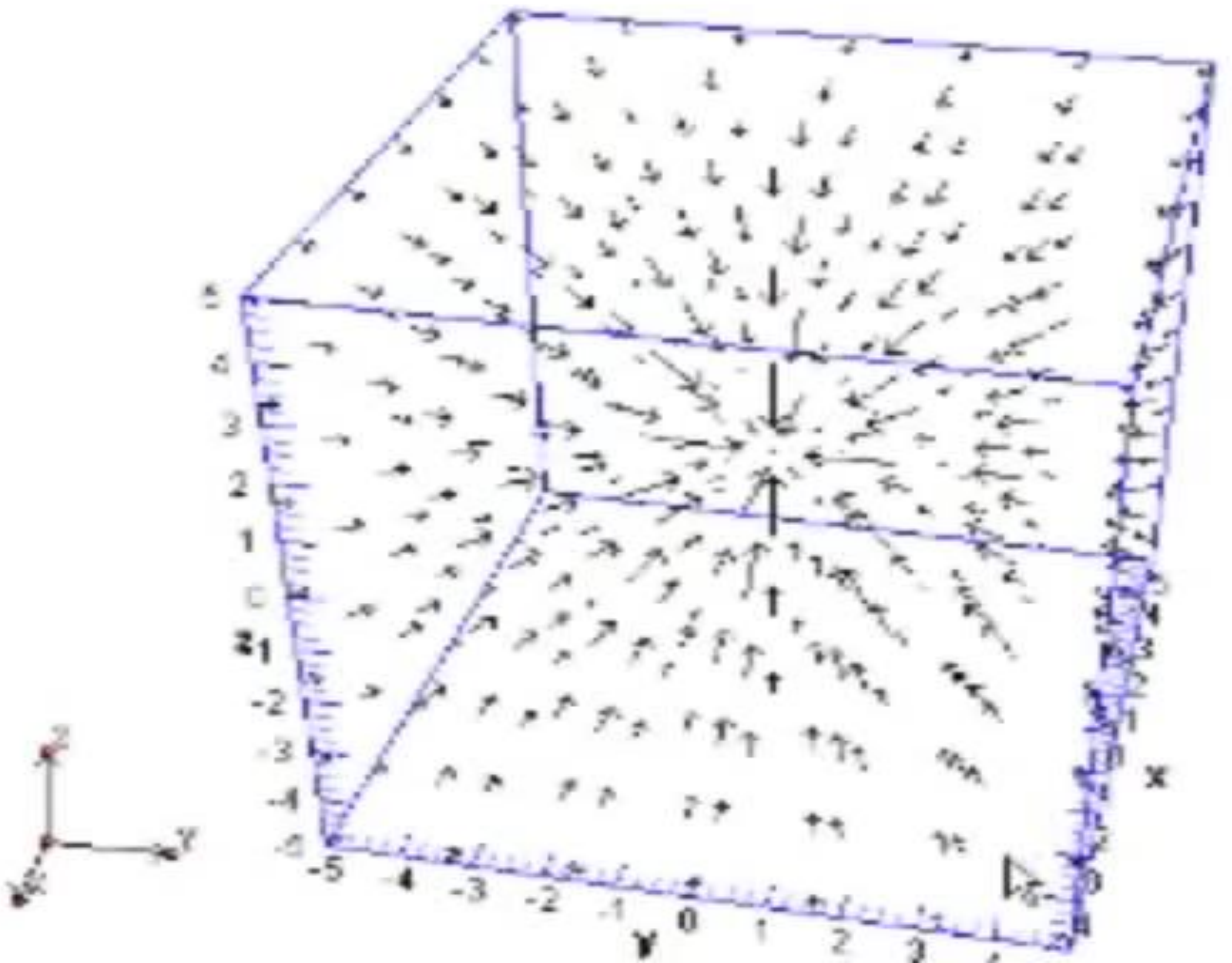
Lorsqu'il est appliqué à Ø, la quantité ∇ Ø (aussi noté : grad Ø) est appelée le Gradient de Ø. La différentielle de Ø par rapport à ds peut donc s'écrire en fonction du produit scalaire entre le vecteur ∇Ø et le vecteur unité u comme suit :

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \nabla\phi \cdot \boldsymbol{u}$$

En utilisant la notation indicielle :

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \partial_i \phi u_i = \phi_{,i} u_i$$

$$\nabla = < \partial_1 \quad \partial_2 \quad \partial_3 > = \partial_i \boldsymbol{e}_i$$



z
y
x

Divergence et rotationnel d'un vecteur

Le produit scalaire :

$$\nabla \cdot V = < \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} > \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

est appelé divergence de V et s'écrit en notation indicielle comme suit :

$$\nabla V = \partial_i v_i = v_{i,i}$$

Le produit vectoriel :

$$\nabla \wedge V = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)e_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)e_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)e_3$$

est appelé rotationnel de V et s'écrit en notation indicielle comme suit :

$\mathcal{E}_{ijk}\partial_i v_j e_k$ ou bien : $\mathcal{E}_{ijk} v_{i,j} e_k$

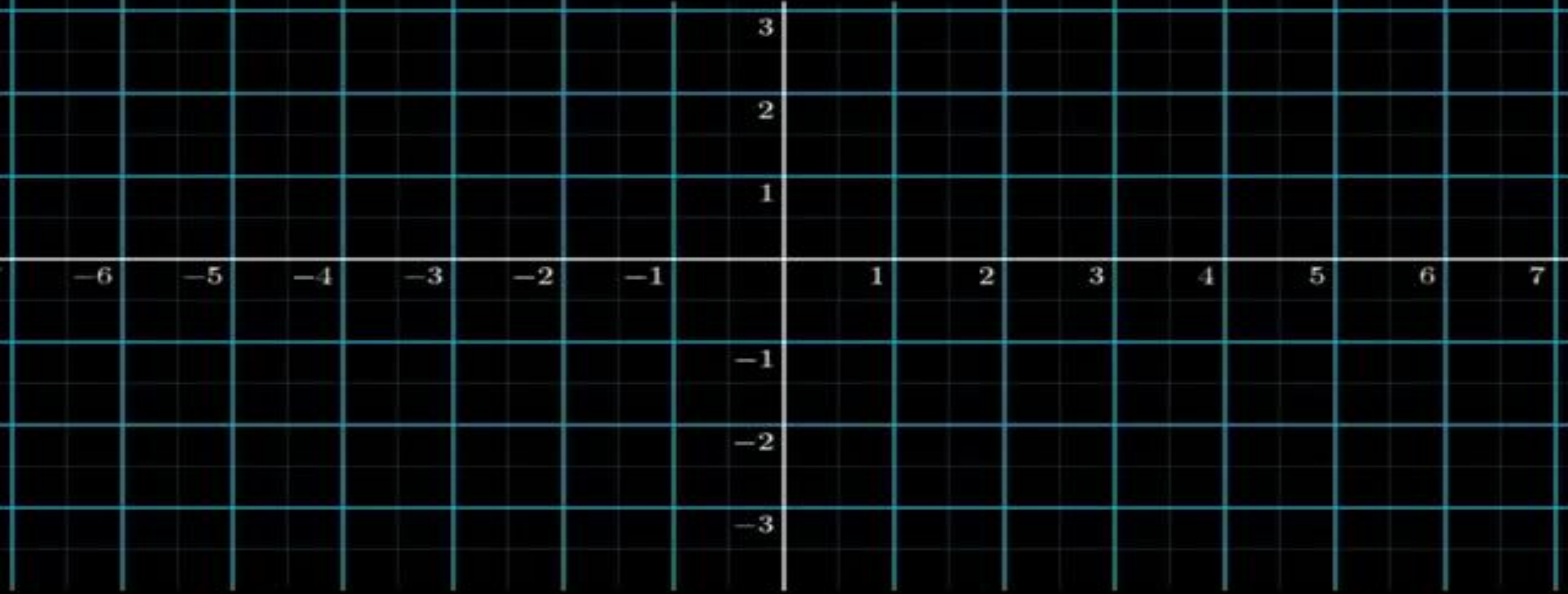
Remarques:

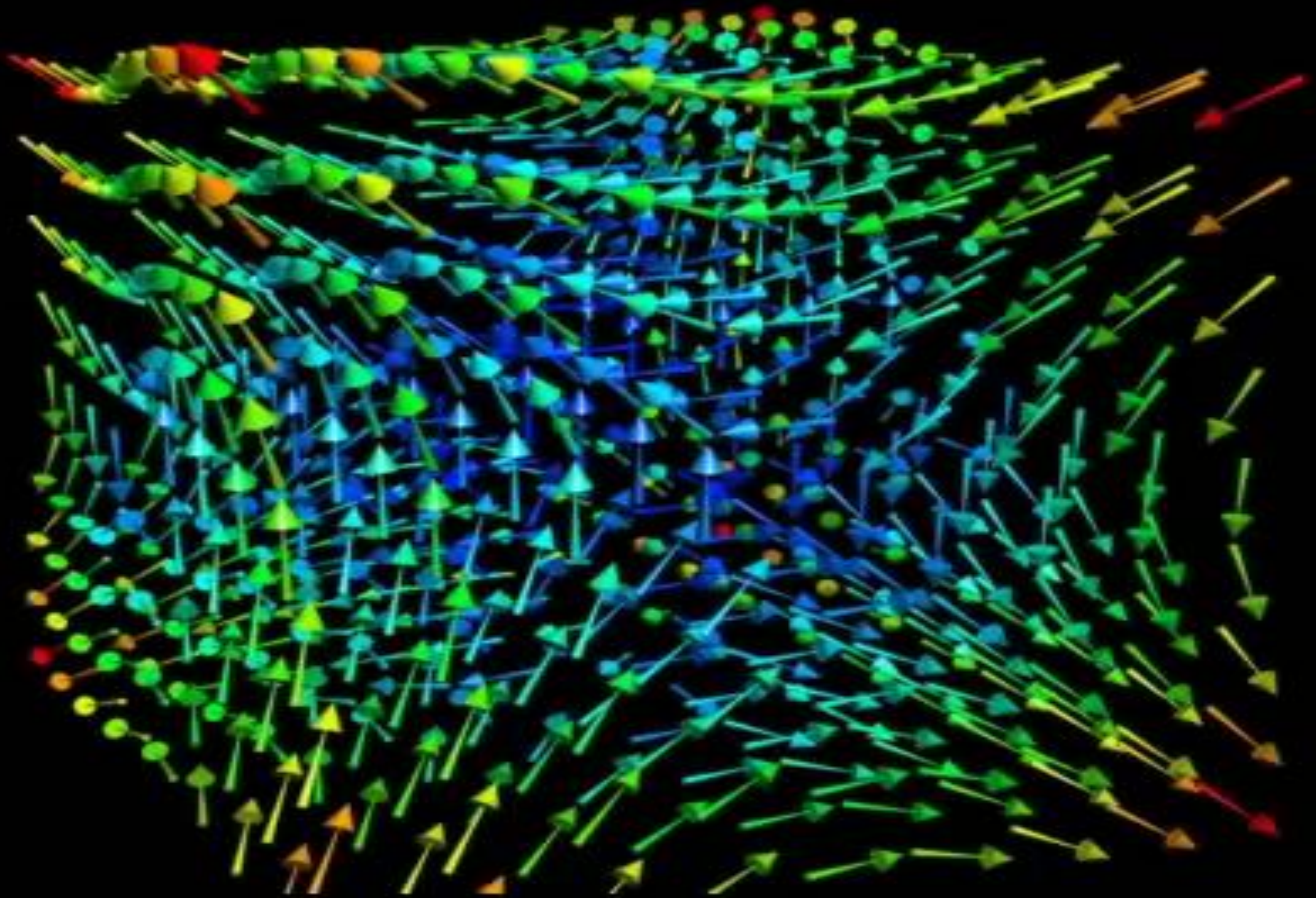
La divergence est une scalaire et le rotationnel est un vecteur (rot V et div V) notations dans la littérature .

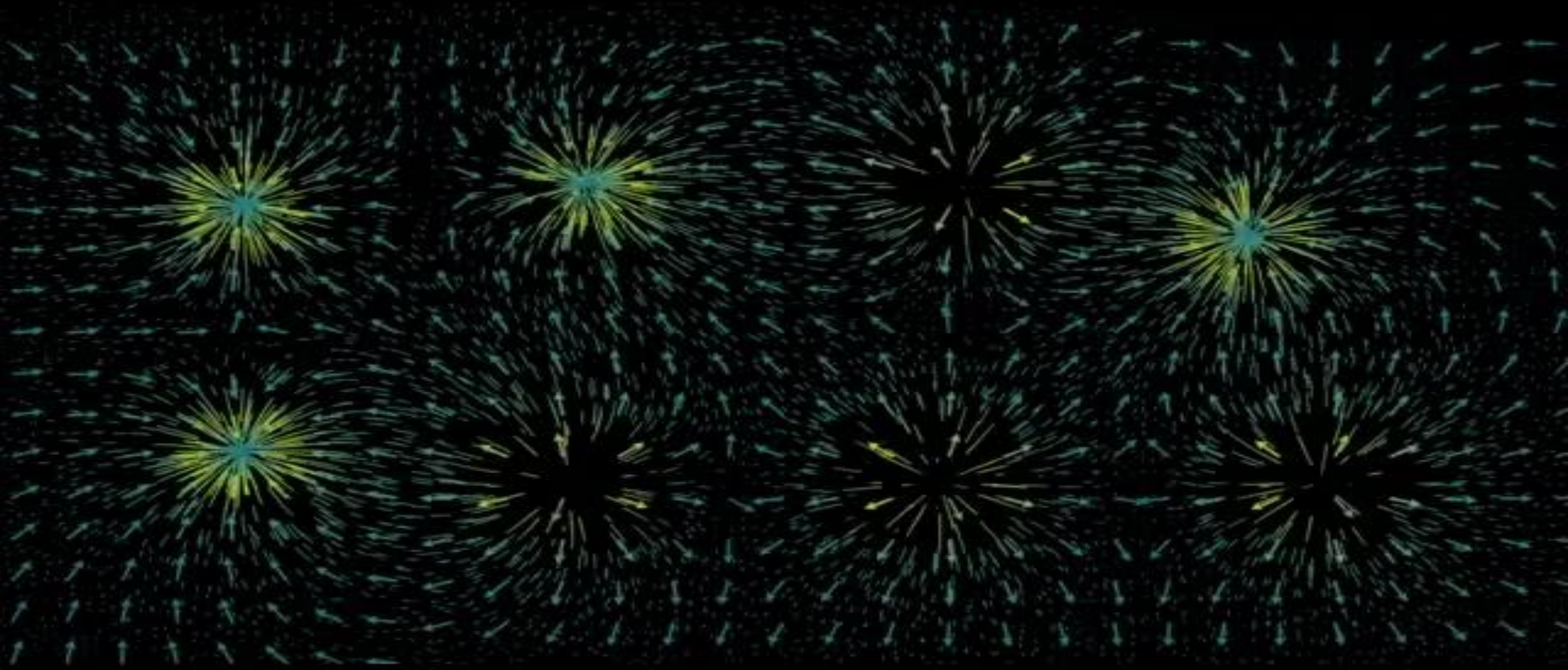
Le rotationnel d'un gradient est nul $\quad \nabla \wedge (\nabla \phi) = 0 \quad \forall \phi$

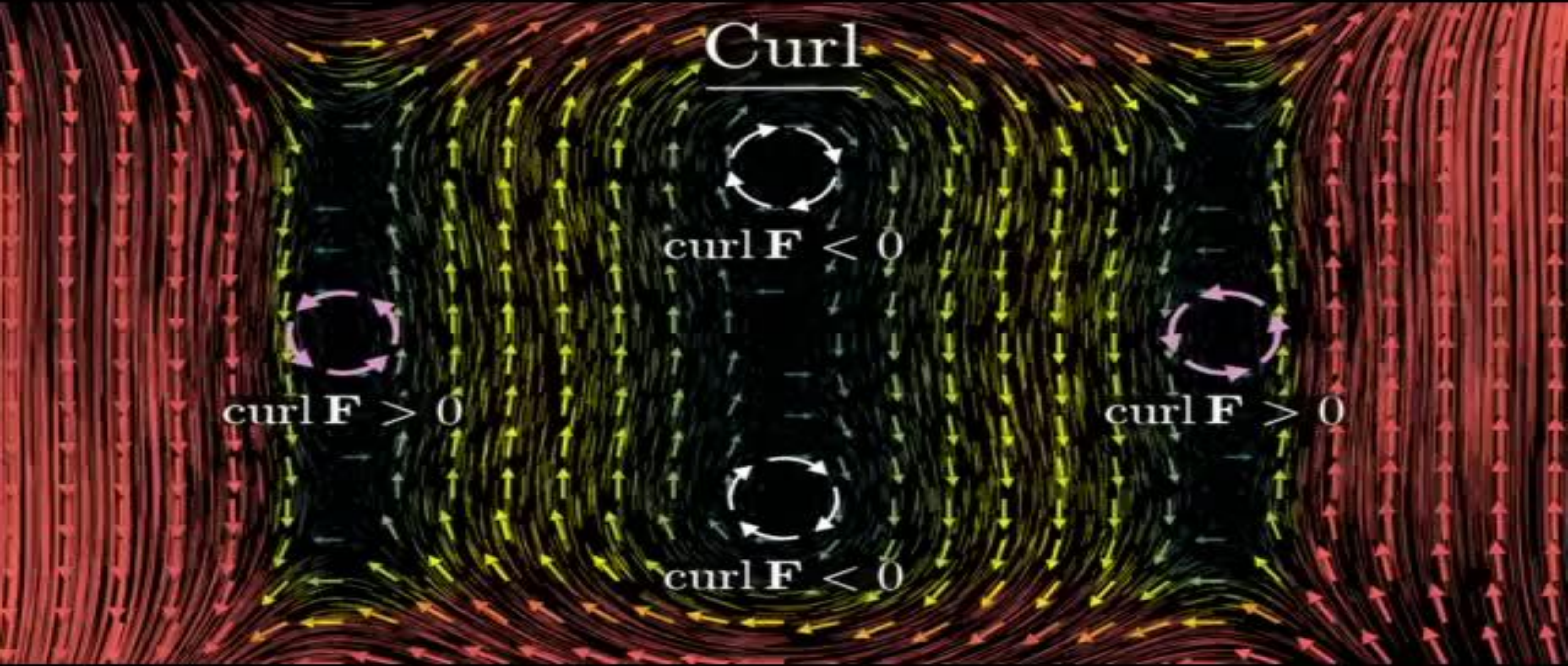
La divergence d'un rotationnel est nulle $\quad \nabla \cdot (\nabla \wedge V) = 0 \quad \forall V$

Vector field








Curl
curl F < 0
curl F > 0
curl F > 0
curl F < 0

Laplacien d'un scalaire

$$\nabla\nabla^T\phi \text{ ou } \Delta\phi \text{ ou bien } \nabla^2\phi$$

La divergence d'un gradient d'une fonction scalaire Ø est le Laplacien de la fonction

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= <\partial/\partial x_1 \quad \partial/\partial x_2 \quad \partial/\partial x_3> \begin{Bmatrix} \partial\phi/\partial x_1 \\ \partial\phi/\partial x_2 \\ \partial\phi/\partial x_3 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}\end{aligned}$$

En notation indicielle :

$$\Delta\phi = \partial_i\phi_i = \partial_{ii}\phi = \phi_{,ii}$$

Gradient d'un vecteur

On défini le gradient d'un vecteur (tenseur d'ordre 1) V la matrice A telle que :

$$A_{ij} = V_{i,j}$$

Sous forme matricielle :

$$A = \begin{bmatrix} \partial V_1/\partial x_1 & \partial V_1/\partial x_2 & \partial V_1/\partial x_3 \\ \partial V_2/\partial x_1 & \partial V_2/\partial x_2 & \partial V_2/\partial x_3 \\ \partial V_3/\partial x_1 & \partial V_3/\partial x_2 & \partial V_3/\partial x_3 \end{bmatrix}$$

La divergence d'une matrice

La divergence d'une matrice (ou tenseur d'ordre 2) T est un vecteur V tel que :

$$V_i = T_{ij,j}$$

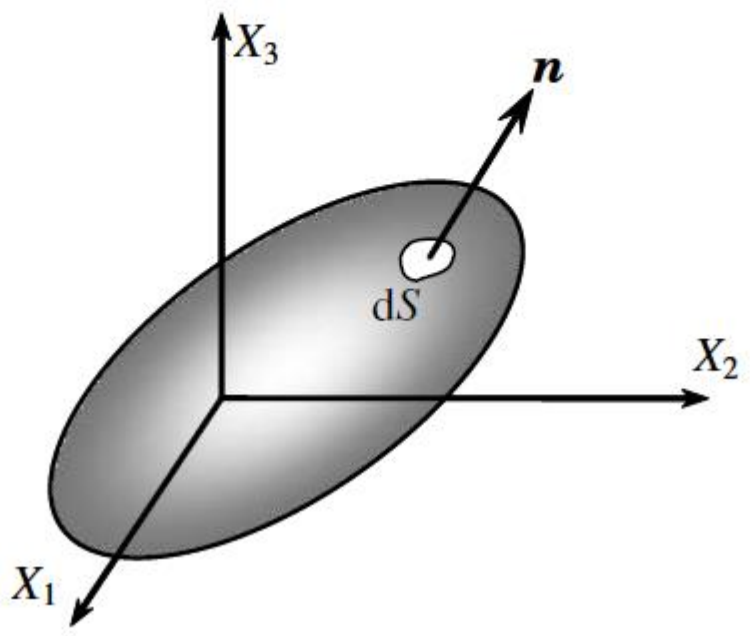
Sous forme matricielle :

$$V = \begin{Bmatrix} V_1 = \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \\ V_2 = \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ V_3 = \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{Bmatrix}$$

Théorème de Gauss

Le théorème de divergence de Gauss établie une relation entre l'intégrale sur le volume V des dérivées du tenseur T et l'intégrale sur la surface S de la projection de T sur la normale n.

$$\int_S (T_{ijk\ldots})(n_q)\,\mathrm{d}S = \int_V T_{ijk\ldots,q}\,\mathrm{d}V$$



L'application de ce théorème pour les cas des tenseurs les plus courants (matrice, vecteur et scalaire) s'écrit en utilisant les notations indicielle et matricielle comme suit :

Un scalaire Ø : $\int_S \phi n_i\,\mathrm{d}S = \int_V \phi_i\,\mathrm{d}V$ ou : $\int_S \phi \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_V \mathrm{grad}\phi\,\mathrm{d}V$

Un vecteur T : $\int_S T_j n_j\,\mathrm{d}S = \int_V T_{j,j}\,\mathrm{d}V$ ou $\int_S T\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_V \mathrm{div}T\,\mathrm{d}V$

et $\int_S \mathscr{E}_{ijk} n_j T_k\,\mathrm{d}S = \int_V \mathscr{E}_{ijk} T_{k,j}\,\mathrm{d}V$ ou $\int_S \boldsymbol{n}\wedge T\,\mathrm{d}S = \int_V \mathrm{rot}T\,\mathrm{d}V$

Une matrice M : $\int_S M_{ij} n_j\,\mathrm{d}S = \int_V M_{ij,j}\,\mathrm{d}V$ ou $\int_S M\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int_V \mathrm{div}M\,\mathrm{d}V$

Théorème de Stokes

Tandis que le théorème de divergence de Gauss relie l'intégrale de volume à l'intégrale de surface fermée délimitant le volume, le théorème de Stokes lie l'intégrale sur une surface ouverte à une intégrale curviligne sur la courbe délimitant la surface.

Ainsi si on nome S une surface ouverte avec C la courbe qui la délimite et on considère un élément de courbe d_s de vecteur unitaire u tel que $ds\,\boldsymbol{u} = dx_i\, e_i$, alors pour tout vecteur V :

$$\int_S \boldsymbol{n}\cdot(\nabla \wedge V)\,\mathrm{d}S = \int_C V\,\mathrm{d}s$$

sous forme indicielle :

$$\int_S \mathcal{E}_{ijk} n_i V_{k,j}\,\mathrm{d}S = \int_C V_k\,\mathrm{d}x_k$$