Introduction au systeme dynamique
Serie d'exercice 1

Exercice 1

Mettre le systeme differentielle:

$$u" = au' + bu + cv' + dv, \qquad v" = ev' + fv + gu' + hu$$

sous la forme d'un système linéaire $x' = Ax$ où x esty un vecteur de dimension n convenable et A est une matrice carrée $n \times n$.
Mettre le systeme differentielle:

$$u" = au' + bu + cv' + dv + \alpha(t), \qquad v" = ev' + fv + gu' + hu + \beta(t)$$

(non autonome) sous la forme d'un système autonome $x' = f(x)$ où x esty un vecteur de dimension n convenable.
Mettre le systeme differentielle:

$$u' = uv - \sin u \cos v = h(u, v), \qquad v" = uv' + 2uv + u^3 v' + e^v = k(u, v, v')$$

sous la forme d'un systeme $x' = g(x)$, où x est un vecteur de dimension convenable.

Exercice 2

Montrer que le problème à conditions initiales suivant :

$$x' = |x|^{\frac{1}{2}}$$

possède quatre solutions (passant par le point $(0, 0)$) et tracer ces solutions dans le plan (t, x)

Exercice 3

Montrer que si $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ alors $e^A = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos a \end{pmatrix}$.

Exercice 4

On considere l'equation diffentielle $x' = x\,|\sin t|$

- 1. Ecrire l'equation sous la forme d'un systeme autonome
  2. Etudier l'existence et l'unicité des solutions sur $\mathbb{R}$
  3. Soit $x(t)$ la solution maximale avec la condition initiale $x(0) = x_0$. Montrer que si $x_0 < 0$ alors pour tout $t \in \mathbb{R} \quad x(t) > 0$.
  4. Calculer explicitement les solutions