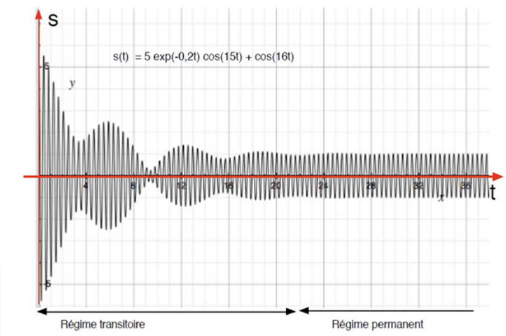
Ondes et Vibrations



Serradj Ismahan

1.0

08-03-2024

Table des matières

I Chapitre 2 :Vibrations libres des systèmes à un degré de liberté.

1. Objectifs

L'objectif de l'étude de ce chapitre est :

- Connaître établir l'équation différentielle qui représente le mouvement.
- Faire la Résoudre de l'équation différentielle.
- Apprendre à déduire les paramètres physiques : Amplitude, Battement, Fréquence

2. Introduction

Tout système vibre loin d'excitations extérieures (le mouvement est dû à une perturbation initiale), les vibrations qu'ont suivies sont dites libres. Si le système nécessite une seule coordonnée pour son étude, le système est donc à un degré de liberté. Si le système ne perd pas de l'énergie, les vibrations sont dites non amorti, dans le cas contraire ils sont dites amortis.

3. Vibrations libres non amorties

Un système qui oscille en absence de toute force d'excitation (f(t)=0), et des forces de

Frottement et de frottement (f $((q))^{\cdot}$ =0) est appelé, oscillateur libre non amorti (Harmonique)[1][*].

3.1. Équation du mouvement

Our déterminer l'équation différentielle représentant le mouvement, nous utilisons deux méthodes seulement : la méthode de newton et la méthode de Lagrange.

3.1.1. La méthode de Newton

On prend le système composé d'une masse m suspendue à un ressort de raideur k et de longueur initiale l0.

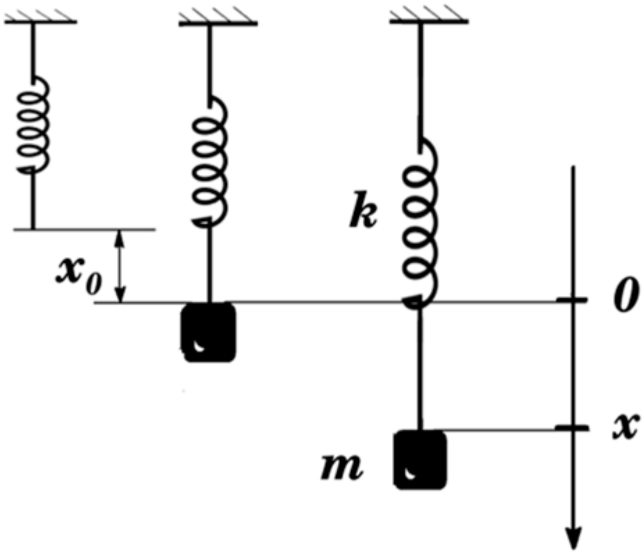


Figure II.1 : Système masse-ressort à un degré

On applique les lois de PFD on obtient

$$\begin{matrix} -kx_0 + mg = 0 \\ et \\ -k(x_0 + x) + mg = m\ddot{x} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x$$

a) Méthode de Lagrange :

L'équation différentielle d'un mouvement libre non amorti est de la forme : $(\ddot{q}+ \omega2q=0)$. Cette équation est obtenue par le formalisme de Lagrange des systèmes conservatifs:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathrm{q}} = 0$$

Pour l'exemple système masse- ressort à un degré de liberté, l'équation de Lagrange s'écrit comme suit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

L:Le Lagrangien du système est donné par L=T-U

q: La coordonnée généralisée, dans ce cas q≡x

L'énergie cinétique du système : c'est l'énergie cinétique de la masse m :

$$T = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\dot{x}^2$$

L'énergie potentielle du système : c'est l'énergie emmagasinée dans le ressort :

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

La fonction de Lagrange:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{T} - \boldsymbol{U} = \frac{1}{2}\,m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Alors

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\,\ddot{x} \\ \left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right) = -kx \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation de Lagrange on aura

$$m\,\ddot{x} + kx = 0$$

On divise alors par m et on trouve

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

3.2. Résolution de l'équation du mouvement

L'équation différentielle d'un mouvement libre non amorti ($\ddot{q}$+ω^2 q=0)est une équation du second ordre sans second membre, sa solution est une fonction sinusoïdale de temps, de la forme :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\sin(\boldsymbol{\omega_0} + \varphi)$$

A : Amplitude des oscillations.

ϕ: Phase initiale.

ω: la pulsation du système, elle dépend des éléments constitutifs (masse, ressort, fils...)

A et ϕ : sont calculés à partir des conditions initiales :

$$t = 0\begin{cases} q = q_0 \\ \dot{q} = \dot{q}_0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} A\sin\varphi = q_0 \\ -A\omega_0\cos\varphi = \dot{q}_0 \end{cases}$$

3.3. La pulsation propre (le battement naturel)

On appelle pulsation propre ω_0 parce qu'elle ne dépend que des grandeurs propres de l'oscillateur (le système masse ressort)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

4. L'énergie totale d'un l'oscillateur harmonique

Pour l'oscillateur harmonique

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = A\omega_0 \cos\,(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}mA^2x\omega_0{}^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) \\ \quad Alor \\ E = \frac{1}{2}mA^2x\omega_0{}^2\left(\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)\right) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}mA^2$$

5. Exemple

Soit le système suivant

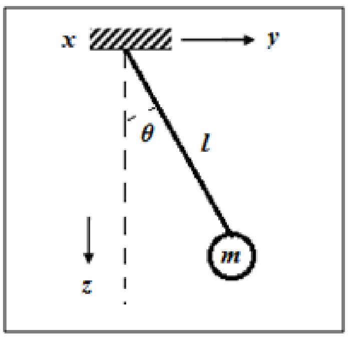
1-Quelle est l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.

2-Quel est le lagrangien du système.

3-Trouver l'équation différentielle du mouvement.

4-Aux conditions initiales x (0)=0 et $\dot{x}$ (0) = 1,

trouver l'amplitude du mouvement et le déphasage.



5.1. Réponse

Le système est libre (aucune force extérieure appliquée) et conservatif (non amorti). L'équation de Lagrange est donnée par la relation L = T- U

L'énergie cinétique du système

$$T = \frac{1}{2} m\, v^2 \quad comme \quad v = l\dot{\theta} \;\Rightarrow T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle du système

$$U = mgl(1 - \cos\theta)$$

$$\begin{cases} L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta) \\ \text{Alor} \\ L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl + mgl\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = m l^2 \ddot{\theta} \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -\,mgl\sin\theta \end{cases}$$

On considère que le pendule oscille (vibre) avec des petits angles, ce qui permit d'écrire $\sin\theta \approx \theta$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\theta \;\Rightarrow\; m l^2 \ddot{\theta} + mgl\theta = 0$$

On divise alors par ml2 et on trouve

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

On reprend par exemple le cas du système masse ressort et mettant l'équation sous la forme

$$\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = 0 \quad avec \quad \omega_0{}^2 = \frac{k}{m} \;\Rightarrow\; x = A_1\cos(\omega_0 t) + A_2\sin(\omega_0 t)$$

Où la pulsation propre est:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

6. Exercice

[solution n°1 p.9]

Le battement naturel pour un système libre (pendule simple) c'est :

II Exercice

[*solution* n°2 p.9]

Dans le système oscillant (masse-ressort) le battement naturel dépend de

- ☐ La masse m
- ☐ Raideur K
- ☐ le coefficient de frottement

Solutions des exercices

> **Solution** n°1

Exercice p. 7

Le battement naturel pour un système libre (pendule simple) c'est :

ω_0

> **Solution** n°2

Exercice p. 8

Dans le système oscillant (masse-ressort) le battement naturel dépend de

- [x] La masse m
- [x] Raideur K
- [ ] le coefficient de frottement

Bibliographie

Polycopié de cours Ondes et Vibrations, Dr. SI SALEM Abdelmadjid ‘; Université des Sciences et de la Technologie Abderrahmane Mira de Bejaia

Vibrations et Ondes Mécaniques cours et exercices Partie I : Vibrations, ‘Dr. Kadri Syham' ; Université des Sciences et de la Technologie Tahri Mohammed Bechar.

Vibrations et Ondes Première Partie Vibrations: ‘Dr: Salim AOULMIT' ; Université des Sciences et de la Technologie Abdelhafid boussouf Mila.

Vibrations et Ondes Mécaniques cours et exercices, ‘H. Djelouah' ; Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene