المحاضرة الثامنة: البرمجة الديناميكية (02)

5- بعض استخدامات البرمجة الديناميكية الأخرى:

5-1- حالة الحمولة المثلى (مسألة حقيبة الظهر):

نفرض أننا نخطط لرحلة مشي طويلة لمسافات طويلة، ولذلك فنحن مهتمون بملء الحقيبة بالأشياء التي تعتبر ضرورية للرحلة، هناك أنواع مختلفة من العناصر تعتبر مرغوبة، يمكن أن تشمل قارورة ماء وتفاح وبرتقال وساندويتش وما إلى ذلك، يحتوي كل نوع عنصر على مجموعة معينة من صفتين وهما: الوزن(أو الحجم)والقيمة التي تحدد مستوى الأهمية المرتبط بكل وحدة من هذا النوع من العناصر.

مثال:

نظرا لأن الحقيبة ذات سعة محدودة من حيث الوزن ، يمكن حمل 10 كلغ في الحقيبة ، الأربع عناصر المحتمل حملها يتم إعطاء وزنها وقيم فائدتها في الجدول التالي:

العنصر (i)	الوزن (كلغ) (w_i)	القيمة (v_i)
قارورة ماء	5	8
برتقال	3	6
تفاح	2	4
ساندويتش	2	5

المطلوب:

إيجاد كيفية تحميل الحقيبة بمجموعة من الوحدات من الأنواع المحددة من العناصر التي تنتج أكبر قيمة إجمالية. باستخدام طريقة البرمجة الديناميكية.

الحل:

ليكن:

x_1: عدد العناصر من قارورة الماء؛ x_2: عدد العناصر من البرتقال؛ x_3: عدد العناصر من التفاح؛ x_4: عدد العناصر من الساندويتش.

w_i = وزن كل نوع من النوع i ‏(i=1,2,...,n) (هنا n=4)

v_i = القيمة المرتبطة بكل عنصر من النوع i ‏(i=1,2,...,n)

W = وزن الحقيبة (W=10 kg)

يمكن صياغة المسألة على أنها مسألة تعظيم:

$$Max\ Z = 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 5x_4$$

$$\sum_{i=1}^{4} w_i \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

نظرا لأن قيم x_i ذات قيم صحيحة، فإن هذه المشكلة لا يمكن حلها باستخدام البرمجة الخطية، بل باستخدام برمجة الأعداد الصحيحة، وبالتالي لا يمكن تطبيق خوارزمية سامبلاكس لحل هذه المسألة.

لحل هذا المثال يجب اتباع المراحل التالية:

أولا- تكوين الجدول:

نكون مجموعة لكل:

$V[0, \ldots, n\,; 0, \ldots, W]; 1 \leq i \leq n; 0 \leq w \leq W$

i \ w	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0										
2	0										
3	0										
4	0										

نلاحظ أن السطر الأول والعمود الأول يحتوي على أصفار وهذا منطقي ، أي أنه في حالة عدم يوجد أي عنصر في الحقيبة فما فائدة إيجاد وزن الحقيبة التي تحوي هذا العنصر ، وكذلك إذا لم تكن لدينا حقيبة فما فائدة حمل العناصر وهكذا، أي:

$V[0, w] = 0; 0 \leq w \leq W$

$V[i, w] = -\infty; w < 0$ (غير مسموح به)

ثانيا- حساب قيم الجدول:

خانات الجدول يتم حسابها تصاعديا باستخدام العلاقة التالية:

$V[i, w] = max[V(i-1, w), v_i + V(i-1, w - w_i)]$

i \ w	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	8	8	8	8	8	8
2	0	0	0	6	6	8	8	8	14	14	14
3	0	0	4	6	6	10	10	12	14	14	18
4	0	0	5	6	9	11	11	15	15	17	19

ثالثا- اختيار العناصر المثلى:

بعد استكمال الجدول نبحث عن العناصر المثلى، نبدأ من آخر خانة V[4, 10]= 19 نقارنها مع V[3, 10]= 18، نلاحظ أن هناك قيمتين مختلفتين، لو كانت متساوية لتجاهلنا تخصيص العنصر الرابع ونمر مباشرة للسطر الثالث، أول تخصيص للبند 4 يكون وزنه (2) أي I_4 (2 kg)، 10- 2= 8، نمر للسطر الثالث والعمود الثامن V[3, 8]= 14 ، نلاحظ أن V[2, 8]= 14 فنتجاهل تخصيص العنصر الثالث، نمر مباشرة للسطر الثاني ونقارنها مع القيمة V[1, 8]= 8، نلاحظ، قيمتين مختلفتين فنخصص العنصر الثاني الذي وزنه I_2 (3 kg)، 8-3 = 5، نمر للسطر الأول والعمود الخامس يكون التخصيص I_1 (5 kg)، إذن التحميل الأمثل لهذه الحقيبة يكون كالتالي: قارورة ماء ، برتقال ، ساندويتش بمجموع أهمية 19، أي:

$Max\ Z = 8(1) + 6(1) + 5(1) = 19$

ملاحظة: يمكن استخدام منطق هذه الطريقة في كثير من الأمْثَلة التطبيقية المتعلقة بالحمولة المثلى: كالسفن، القطارات، الشاحنات الخاصة بنقل البضائع.

2-5- مسألة الاستثمار:

الهدف من توزيع الأموال بين الاستثمارات المختلفة هو تقليل المخاطر ، لذا سيتم توضيح أهمية البرمجة الديناميكية في ايجاد المزيج الأمثل بين المبالغ المستثمرة الذي يحقق أقصى عائد من بين عدة خيارات متوفرة للاستثمار.

- **مبدأ بيلمان للأمثلة:**

نكون دالة هدف، نوضحها على $f_1(x_1), f_2(x_2), f_3(x_3), \dots, f_n(x_n)$ نفرض أن الدوال هي على النحو التالي:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n)$$

يكمن حل المسألة في إيجاد قيمة المتغيرات $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ عندما تكون دالة الهدف في حالة التعظيم، وتخضع للقيود التالية:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b_n$$
$$a_j \geq 0;\ \ x_j \geq 0;\ j = 1, \dots, n;\ b_n \geq 0$$

ندرج الدوال التالية: $F_k(x_k)$ حيث الصيغة العامة تكون على النحو التالي:

$$F_k(b_k) = \max_{x_k \leq b_k/a_k} \{f_k(b_k) + F_{k-1}(b_k - a_kx_k)\} \dots \dots \dots . (I)$$
$$k = 2, \dots, n$$
$$F_0(x_0) = 0$$

بالنظر إلى المعادلة الأخيرة وبالنسبة للعدد الوحيد تكون القيمة والتي من أجلها نكتب بالنظر إلى المعادلة الأخيرة (I) حيث: $n = k$، وبالنسبة للعدد الوحيد $_n \geq 0$ تكون القيمة $^*_n = x_n(b_n)$ والتي من أجلها نكتب:

$Max(F) = F_n(b_n)$

بمعنى آخر تصل دالة الهدف إلى أقصى قيمتها في التكرار الأخير $_n(b_n)$.

وفي الأخير نحدد مجموعة القيم المثلى التي تم حسابها، قد تكون قيمة واحدة أو أكثر $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$، حيث تحقق دالة الهدف المعظمة والتي من خلالها نحدد الاستراتيجية المثلى التي تكون على النحو التالي:

$U^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$

مثال:

نفرض أن لدينا مبلغ 300000 دج نود استثمارها من أجل تحقيق أقصى ربح، ولدينا ثلاثة خيارات استثمار متاحة، حيث يتفاوت عائد الاستثمار من خيار لآخر وفقا لطبيعة الاستثمار والمبلغ المستثمر، مصفوفة العائد المتوقع حسب الخيارات والمبلغ المستثمر مبينة في الجدول التالي:

الاستثمار	الخيار 1	الخيار 2	الخيار 3
75000	12500	10000	15000
150000	20000	18500	25000
225000	35000	32500	30000
300000	45000	50000	40000

المطلوب:

استخدم طريقة البرمجة الديناميكية لتحديد مزيج الاستثمار الأمثل والذي بفضله يحقق أقصى عائد محقق.