البرنامج الخطي الثنائي
(المقابل)

1- مفهوم البرنامج الخطي الثنائي (المقابل) :

تتوفر كل مشكلة يُمكن صياغتها تحت شكل برنامج خطي على نموذجان: الأول يُطلق عليه بالنموذج الأولي (الأصلي) والذي يتم صياغته من خلال معطيات المشكلة المطروحة، والثاني عبارة عن مشكلة مناظرة للمشكلة الأولى يُطلق عليه بالنموذج الثنائي أو المقابل والذي يتم الحصول عليه بتحويل النموذج الأولي.

ومن مميزات النموذج المقابل أو الثنائي:

- يساعد في بعض الأحيان على التوصل إلى الحل الأمثل بشكل أسرع من إستخدام البرنامج الخطي الأولي، وذلك بتقليص خطوات الحل؛
- التخلص من القيم السالبة في الطرف الأيمن من القيود إن وُجدت في البرنامج الخطي الأولي؛
- في حالة وجود قيمة سالبة لأحد المتغيرات الأساسية في النموذج الثنائي، فإنه يمكن إيجاد الحل الأمثل له، في حين لا يُمكن إيجاد الحل في هذه الحالة إذا كان النموذج أولي؛
- يساعد على إجراء تحليل ما بعد الأمثلية أو تحليل الحساسية؛

2- خطوات تحويل برنامج خطي أولي إلى برنامج خطي ثنائي (مقابل):

إذا كان البرنامج الخطي الأولي كما يلي:

برنامج خطي أولي

$$\text{Max } Z=CX \quad \text{s/c} \begin{cases} AX \le B \\ X \ge 0 \end{cases}$$

برنامج خطي ثنائي

$$\text{Min } Z=B'Y \quad \text{s/c} \begin{cases} A'Y \ge C' \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

حيث أنه لإيجاد البرنامج الخطي الثنائي لأي برنامج خطي أولي نتبع الخطوات التالية:

1- قلب صيغة دالة الهدف: إذا كانت صيغة دالة الهدف في البرنامج الخطي الأولي هي .Min، فإنها تتحول إلى .Max في البرنامج الخطي المقابل، وإذا كانت صيغتها هي .Max فإنها تتحول إلى .Min؛

2- إذا كانت متغيرات البرنامج الخطي الأولي هي $x_1,x_2,x_3,\ldots x_n$، فإن متغيرات البرنامج الخطي المقابل هي $y_1,y_2,y_3,\ldots y_m$، حيث m هو عدد قيود البرنامج الخطي الأولي؛

3- قيم الطرف الأيمن من القيود في البرنامج الخطي الأولي تتحول إلى معاملات المتغيرات في دالة الهدف في البرنامج الخطي المقابل؛

4- معاملات كل متغيرة في قيود البرنامج الخطي الأولي حسب ترتيب القيود تتحول إلى معاملات متغيرات قيود البرنامج الخطي المقابل حسب نفس الترتيب؛

5- معاملات المتغيرات في دالة الهدف في البرنامج الخطي الأولي تتحول إلى قيم الطرف الأيمن من القيود في البرنامج الخطي المقابل بنفس الترتيب؛

6- إذا كانت إشارة المتغيرة رقم i في البرنامج الخطي الأولي "أكبر من أو تساوي" فإن القيد رقم i في البرنامج الخطي الثنائي يكون عبارة عن متباينة "أصغر من أو تساوي" إذا كانت دالة الهدف في حالة التعظيم، ومتباينة "أكبرمن أو تساوي" إذا كانت دالة الهدف في حالة التدنية.

7- إذا كانت إشارة المتغيرة رقم i في البرنامج الخطي الأولي "أصغر من أو تساوي" فإن القيد رقم i في البرنامج الخطي الثنائي يكون عبارة عن متباينة "أكبر من أو تساوي" إذا كانت دالة الهدف في حالة التعظيم، ومتباينة «أصغر من أو تساوي" إذا كانت دالة الهدف في حالة التدنية.

8- إذا كانت إشارة المتغيرة رقم i في البرنامج الخطي الأولي حرة، فإن القيد رقم i في البرنامج الخطي الثنائي يكون في صورة معادلة؛

9- إذا كان القيد رقم i في البرنامج الخطي الأولي عبارة عن معادلة فإن إشارة المتغيرة رقم i في البرنامج الخطي الثنائي تكون حرة؛

10- إذا كان القيد رقم i في البرنامج الخطي الأولي -حالة التعظيم- في صورة متباينة "أصغر من أو تساوي" فإن إشارة المتغيرة رقم i في البرنامج الخطي الثنائي تكون "أكبر من أو تساوي".

11- إذا كان القيد رقم i في البرنامج الخطي الأولي -حالة التعظيم- في صورة متباينة "أكبر من أو تساوي" فإن إشارة المتغيرة رقم i في البرنامج الخطي الثنائي تكون "أصغر من أو تساوي".

12- إذا كان القيد رقم i في البرنامج الخطي الأولي -حالة التدنية- في صورة متباينة "أكبر من أو تساوي" فإن إشارة المتغيرة رقم i في البرنامج الخطي الثنائي تكون "أكبر من أو تساوي".

13- إذا كان القيد رقم i في البرنامج الخطي الأولي -حالة التدنية- في صورة متباينة "أصغر من أو تساوي" فإن إشارة المتغيرة رقم i في البرنامج الخطي الثنائي تكون "أصغر من أو تساوي".

لنفترض البرنامج الخطي الأولي التالي:

$$\text{Max } Z=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$$

$$\textbf{s/c}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \geq b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \leq b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 = b_3 \\ x_1 \leq 0,\ x_2\forall\ ,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

يُكتب البرنامج الخطي الثنائي له كما يلي:

$$\text{Min } Z=b_1y_1+b_2y_2+b_3y_3$$

$$\textbf{s/c}\begin{cases} a_{11}y_1+a_{21}y_2+a_{31}y_3 \leq c_1 \\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+a_{32}y_3 = c_2 \\ a_{13}y_1+a_{23}y_2+a_{33}y_3 \geq c_3 \\ y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3\forall \end{cases}$$

مثال:

أكتب البرنامج الخطي الثنائي للبرنامج الخطي الأولي التالي:

$$\text{Max } Z=3x_1+3x_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} x_1+3x_2 \leq 2 \\ 4x_1+x_2 \leq 6 \\ 2x_1+2x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

$$\text{Min } Z= 2y_1+6y_2+9y_3$$

$$\textbf{s/c} \begin{cases} y_1+4y_2+2y_3 \geq 3 \\ 3y_1+y_2+2y_3 \geq 3 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

مثال:

أكتب البرنامج الخطي الثنائي للبرنامج الخطي الأولي التالي:

$$Z_{min}=4x_1+3x_2+x_3$$

$$s/c \begin{cases} x_1+3x_2+x_3 \leq 6 \\ 4x_1+x_2+5x_3 \geq 3 \\ 2x_1+2x_2+4x_3=9 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \forall,\ x_3 \leq 0 \end{cases}$$

الحل:

$$Z_{max}= 6y_1+3y_2+9y_3$$

$$s/c \begin{cases} y_1+4y_2+2y_3 \leq 4 \\ 3y_1+y_2+2y_3 = 3 \\ y_1+5y_2+4y_3 \geq 1 \\ y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 \forall \end{cases}$$

ملاحظات:

1- ثنائية البرنامج الخطي المقابل هي البرنامج الخطي الأولي.

2- إذا كانت صيغة البرنامج الخطي الأولي قانونية، فإن صيغة البرنامج الخطي الثنائي تكون قانونية أيضاً.

3- إذا كان حل البرنامج الخطي الأولي غير محدود، فإن حل البرنامج الخطي المقابل يكون مستحيل.

4- إذا كان حل البرنامج الخطي الأولي مستحيل، فإن حل البرنامج الخطي المقابل يكون غير محدود أو مستحيل.