Université Abdelhafid Boussouf - Mila $2023-2024$
Institut des Mathématiques et informatique
Département des Mathématiques **Algèbre** 3

Série no 1 : Révision

Exercice 1. *soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & P & \longmapsto & P - XP' \end{array}$$

1. Montrer que est une application linéaire.

2. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 2. — *Démontrez que si A est inversible, alors* $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

— *Démontrez que si $A \in R^4$, alors* $\det(-A) = \det(A)$.

Exercice 3. *Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :*

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad u(e_2) = 3e_2, \quad u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. *Déterminer une base de* $\ker u$. *u est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ?*

2. *Déterminer une base de* $\operatorname{Im} u$. *Quel est le rang de u ?*

3. *Montrer que* $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 4. *Calculer le determinant et l'inverse des deux matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. ***1.*** *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A(\lambda)$ la matrice*

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & \lambda \\ 2\lambda - 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & \lambda + 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

(a) *Calculer le déterminant de $A(\lambda)$.*

(b) *Déterminer en fonction de λ le rang de la matrice $A(\lambda)$.*

2. *Déterminer le nombre λ tel que la matrice $A - \lambda I_n$ ne soit pas inversible, avec*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad et \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. *Trouver la solution du système suivant :*

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 9x_4 & = & 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 & = & 6 \end{array} \right.$$